目　录

第一章　线性代数的一些内容

这一章主要列举多重线性代数中要用到的一些线性代数结论，以便于读者查阅．叙述力求简明扼要但也保持一定的系统性．对线性代数比较熟悉的读者可从本章最后一节开始阅读．

§1　线 性 扩 张

如无特别说明，以后所说的向量空间都是复数域$\boldsymbol{C}$上的有限维向量空间（维数$\geqslant 1$），而$\boldsymbol{C}$可看作是自身上的1维向量空间．

复数域$\boldsymbol{C}$上所有1行n列矩阵组成具体的n维向量空间$M_{1,n}$，它的一组最简单的基是n个行向量

$$(1,0,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1).$$

这组基称为$M_{1,n}$的**自然基**．类似地$M_{n,1}$也有相应的n个列向量组成它的自然基．

所有m行n列矩阵组成mn维向量空间$M_{m,n}$（当$m=n$时简写为M_n），它的自然基为E_{ij}，$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$，E_{ij}是(i,j)位置元素为1其余元素为0的m行n列矩阵．

由向量空间V到向量空间W的所有线性映射的集合记为$L(V,W)$，它本身当然也是个向量空间，其运算是：对于$S,T\in L(V,W)$，

$(S+aT)v=Sv+aTv$，对所有 $v\in V$，$a\in \mathbf{C}$.

对于 $T\in L(V,W)$，T 的值域（也叫像）定义为 $\mathrm{Im}T=\{Tv|v\in V\}$. $\mathrm{Im}T$ 是 W 的一个子空间，其维数称为 T 的秩，记作 $\rho(T)=\dim(\mathrm{Im}T)$，也常写成 $\mathrm{rank}(T)$.

类似地 $\mathrm{Ker}T=\{v\in V|Tv=0\}$ 是 V 的子空间，称为 T 的核（或核空间）.

对于 $T\in L(V,W)$，如果存在 $S\in L(W,V)$，使得 $TS=I_W$，$ST=I_V$，（I_W,I_V 分别是 W 和 V 上的恒等映射）则称 T 是可逆的. 容易验证，T 的逆若存在则是唯一的，这个唯一的逆 S 通常写为 T^{-1}.

若存在可逆的 $T\in L(V,W)$，则称向量空间 V 与向量空间 W 是同构的. 可逆的线性映射 T 也称为**同构映射**.

$M_{m,n}$ 中的矩阵 A 也可看作是线性映射，即 $A\in L(M_{n,1},M_{m,1})$，因而也有矩阵 A 的秩，A 的可逆性等名称.

定理1.1 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的一组基，$S,T\in L(V,W)$，若 $Se_i=Te_i$，$i=1,\cdots,n$，则 $S=T$.

证 对任意的 $v\in V$，由 $v=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$ 有

$$Sv=\sum_{i=1}^{n}a_iSe_i=\sum_{i=1}^{n}a_iTe_i=Tv. \qquad \blacksquare$$

定理1.2（线性扩张）设 $e_1,\cdots,e_n$ 是向量空间 V 的任一组基，$w_1,\cdots,w_n$ 是向量空间 W 的任意 n 个向量，则存在唯一的线性映射 $T\in L(V,W)$ 使得 $Te_i=w_i$，$i=1,\cdots,n$. 这就是说，要确定一个线性映射只需在 V 的一组基上给定值即可.（然后可以利用线性扩张到整个 V 上）

证 对任意的 $v=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\in V$，定义 $Tv=\sum_{i=1}^{n}a_iw_i$，因 a_i 由 v 唯一确定，故映射 $T:V\to W$ 是定义好了的. 设 $u=\sum_{i=1}^{n}b_ie_i$，$a\in\boldsymbol{C}$，则 $v+au=\sum_{i=1}^{n}(a_i+ab_i)e_i$，于是 $T(v+au)=\sum_{i=1}^{n}(a_i+ab_i)w_i=\sum_{i=1}^{n}a_iw_i+a\sum_{i=1}^{n}b_iw_i=Tv+aTu$，这说明 T 是线性的. 又由定义显然有 $Te_i=w_i$，$i=1,\cdots,n$. T 的唯一性由定理1.1直接表明. ▎

关于线性映射的秩，下面的结论将多次用到.

定理1.3 设 $T\in L(V,W)$，$\dim V=n$，则 $\rho(T)=k$ 的充要条件是存在 V 的基 $v_1,\cdots,v_k,v_{k+1},\cdots,v_n$ 使 $Tv_1,\cdots,Tv_k$ 线性无关而 $Tv_{k+1}=\cdots=Tv_n=0$.

证 假定 $\rho(T)=k$，那么 $\mathrm{Im}T$ 中存在 k 个向量的基，不妨就记作 $Tv_1,\cdots,Tv_k$. 设 $u_1,\cdots,u_t$ 是 $\mathrm{Ker}T$ 的任一组基，令 $E=\{v_1,\cdots,v_k,u_1,\cdots,u_t\}$，则对任意的 $v\in V$ 就有

$$Tv=\sum_{i=1}^{k}c_iTv_i\ (\text{因 } Tv\in\mathrm{Im}T),$$

于是
$$T\left(v-\sum_{i=1}^{k}c_iv_i\right)=0,$$

即
$$v-\sum_{i=1}^{k}c_iv_i\in\mathrm{Ker}T,$$

故
$$v-\sum_{i=1}^{k}c_iv_i=\sum_{i=1}^{t}d_iu_i,$$

这说明任意 v 可用 E 的向量线性表示.

又若有 $$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i + \sum_{j=1}^{t} b_j u_j = 0,$$

两边作用 T 得 $$\sum_{i=1}^{k} a_i T v_i = 0,$$

故 $a_i=0$，$i=1,\cdots,k$，代入上式又得 $b_j=0$，$j=1,\cdots,t$，这说明 E 的向量是线性无关的，因而 E 是 V 的基，于是 u_1，$\cdots,u_t$ 就是所求的 $v_{k+1},\cdots,v_n$.

反之由 $Tv_{k+1}=\cdots=Tv_n=0$ 知对任意的 $v\in V$，Tv 可用线性无关的 $Tv_1,\cdots,Tv_k$ 线性表示，因而 $\rho(T)=k$. ∎

从定理1.3的证明中立即得到下面的结论.

定理1.4 设 $T\in L(V,W)$，则
$$\dim V=\dim(\operatorname{Im}T)+\dim(\operatorname{Ker}T).$$ ∎

练　习　1

1. 设 $T\in L(V,W)$，证明 $\rho(T)\leqslant\min\{\dim V,\dim W\}$.

2. 设 $T\in L(V,U)$，$S\in L(U,W)$，证明 $\rho(ST)\leqslant\min\{\rho(T),\rho(S)\}$.（这里 S 与 T 的乘积 $ST\in L(V,W)$）

3. 设 $T\in L(V,W)$，证明 T 的逆若存在则是唯一的，又 T 为可逆的充要条件是 $\rho(T)=\dim V=\dim W$.

4. 证明由定理 1.2 线性扩张所唯一确定的线性映射 T 为可逆的充要条件是 $w_1,\cdots,w_n$ 为 W 的一组基.

5. 证明向量空间 V 与 W 同构的充要条件是 $\dim V=\dim W$.

6. 若 $T\in L(V,U)$，$S\in L(U,W)$ 都可逆，证明 ST 也可逆且 $(ST)^{-1}=T^{-1}S^{-1}$. 也有 $(T^{-1})^{-1}=T$.

7. 由练习 1.3 知矩阵中只有方阵才有逆可言，证明方阵 A 可逆的充要条件是 A 的列向量线性无关.

8. 设 $A,B\in M_n$ 且 $AB=I_n$（单位方阵），证明 $BA=I_n$.

9. 设 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的一组基，$A=(a_{ij})\in M_n$ 是可逆方阵，令 $e'_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i$，$j=1,\cdots,n$，证明 $E'=\{e'_1,\cdots,e'_n\}$ 也是 V 的一组基.

§2 线性映射的矩阵表示

设 $T\in L(V,W)$，V 的一组有序基为 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$，W 的一组有序基为 $F=\{f_1,\cdots,f_m\}$，由 $Te_j\in W$ 就有

$$Te_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}f_i,\quad j=1,\cdots,n.$$

我们称 $A=(a_{ij})\in M_{m,n}$ 为线性映射 T 关于有序基 E 到有序基 F 的矩阵表示，记作

$$[T]_E^F=A.$$

由定理1.1知，若 $[S]_E^F=[T]_E^F$ 则 $S=T$，故在基固定之下，$L(V,W)$ 的线性映射与 $M_{m,n}$ 中的矩阵是一一对应的. 一般说，映射较抽象便于理论推导而矩阵较具体便于实际计算，故由上面的对应关系，有些线性映射问题就可化为矩阵来计算而有些矩阵问题则可化为线性映射来处理. 这种互相转换无论在理论上或实际上都是很有用的. 下面我们进一步讨论这种关系.

向量空间 V 的向量 v 也可看作从一维向量空间 $\mathbf{C}$ 到 n

维向量空间 V 的线性映射，即 $v\in L(\mathbf{C},V)$. 若 $\mathbf{C}$ 的基取为 1，V 的有序基为 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$，由

$$v\cdot 1=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i,$$

就有 $[v]_1^E=(a_1,\cdots,a_n)^T\in M_{n,1}$，简记为 $[v]^E$. V 对于 E 的矩阵表示也称为向量 v 关于基 E 的坐标.

定理2.1 设 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$，$F=\{f_1,\cdots,f_m\}$,$G=\{g_1,\cdots,g_l\}$ 分别为 V，W 和 U 的有序基，又设 $T\in L(V,W)$，$S\in L(W,U)$，则

$$[ST]_E^G=[S]_F^G[T]_E^F.$$

特别地

$$[Tv]^F=[T]_E^F[v]^E,\quad \forall v\in V.$$

证 假定 $Te_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}f_i$，$j=1,\cdots,n$，$Sf_i=\sum_{k=1}^{l}b_{ki}g_k$，$i=1,\cdots,m$，即 $[T]_E^F=A$，$[S]_F^G=B$，那么

$$STe_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}Sf_i=\sum_{k=1}^{l}\Big(\sum_{i=1}^{m}b_{ki}a_{ij}\Big)g_k=\sum_{k=1}^{l}(BA)_{kj}g_k,$$

由定义就得 $[ST]_E^G=BA=[S]_F^G[T]_E^F$. ∎

$L(V,V)$中的线性映射也称为线性算子（或叫 V 的自同态）. 对于 $S,T\in L(V,V)$，若存在可逆的 $R\in L(V,V)$ 使得 $S=R^{-1}TR$，则称 S 相似于 T，也说 T 经过相似变换成为 S，简写为 $S\sim T$. 对于 n 阶方阵也有同样名称.

容易看到相似是一个等价关系，即它具有反身性：$T\sim T$；对称性：若 $S\sim T$ 则 $T\sim S$；传递性：若 $S\sim T$，$T\sim H$，则 $S\sim H$. 这个等价关系把 $L(V,V)$ 分为一些不相交的等价类.

下面是线性算子 T 在不同基下的矩阵（方阵）表示的关系.

定理2.2 设 $T\in L(V,V)$，E 与 E' 是 n 维向量空间 V 的两组基，则 $[T]_{E'}^{E'}$ 与 $[T]_E^E$ 是相似方阵. 反之任意两个相似方阵都可看作是同一算子 T 在不同基下的矩阵表示.

证 设 I 是 V 上的恒等算子，用定理2.1得

$$[I]_{E'}^{E}[I]_{E}^{E'}=[I]_{E}^{E}=I_n\ (\text{单位方阵})$$

$[I]_{E'}^{E}$ 称为从基 E 到基 E' 的过渡矩阵，故若记 $[I]_{E'}^{E}=P$，则 $[I]_{E}^{E'}=P^{-1}$. 于是

$$[T]_{E'}^{E'}=[ITI]_{E'}^{E'}=[I]_{E}^{E'}[T]_{E}^{E}[I]_{E'}^{E}=P^{-1}[T]_{E}^{E}P.$$

反之设 A,B 是两个相似方阵，即 $B=R^{-1}AR$. 又设 E 是 V 的任一有序基，由线性扩张定理，方阵 A 唯一确定一线性算子 T 使 $[T]_{E}^{E}=A$. 又由练习 1.9，可逆的 R 确定一组基 E' 使 $[I]_{E'}^{E}=R$，于是

$$[T]_{E'}^{E'}=[I]_{E}^{E'}[T]_{E}^{E}[I]_{E'}^{E}=R^{-1}AR=B.\qquad \blacksquare$$

由此定理可以看到，任一相似方阵类都可看作是由同一线性算子 T 引起的. 因此我们可以用相似方阵的共有性质来定义算子的相应性质. 例如因为相似方阵的迹相同，故我们就可以定义算子 T 的迹为其任一有序基下的矩阵表示的迹（对角线元素之和）. 同样的情况适用于方阵与算子的特征值和行列式.

完全类似，任一相似算子类也可看作是由同一矩阵引起.

练 习 2

1. 设 E，F 分别为 V，W 的有序基，证明

$$[S+aT]_E^F=[S]_E^F+a[T]_E^F,\ \forall S,T\in L(V,W),a\in \mathbf{C};$$
$$[v+au]^E=[v]^E+a[u]^E,\forall v,u\in V,a\in \mathbf{C}.$$

2. 设 $\dim V=n$，$\dim W=m$，分别在 V 和 W 取定一组基，对于 $L(V,W)$ 中每一线性映射，令它关于所取定的基的矩阵与之对应．证明，这是从向量空间 $L(V,W)$ 到向量空间 $M_{m,n}$ 的同构映射．

3. 证明 $\dim L(V,W)=\dim V\cdot\dim W$．

4. 设 E,F 分别为 V,W 的有序基，若 $T\in L(V,W)$ 是可逆的，证明 $[T^{-1}]_F^E=([T]_E^F)^{-1}$．

5. 证明如果把矩阵 A 看作 $L(M_{n,1},M_{m,1})$ 的线性映射，那么它关于 $M_{n,1}$ 与 $M_{m,1}$ 的自然基的矩阵表示就是 A 本身．

6. 设 E,F 分别是 V,W 的有序基，$T\in L(V,W)$，$[T]_E^F=A$，证明 $\rho(T)=\rho(A)$．

§3 酉空间

向量空间 V 上的二元复值函数 (v,u) 若满足下面三个条件：

(i) $(v,u)=\overline{(u,v)}$，$\forall v,u\in V$；

(ii) $(v+aw,u)=(v,u)+a(w,u)$，$\forall v,w,u\in V$，$a\in\mathbf{C}$；

(iii) $(v,v)>0$，$\forall 0\neq v\in V$，

则称这个函数 $(,)$ 为向量空间 V 上的**内积**．定义了内积的向量空间称为**内积空间**．复内积空间也称为**酉空间**．

$\|v\|=\sqrt{(v,v)}$ 称为向量 v 的范数．若 $\|v\|=1$ 则称 v 为

单位向量.

若$(v,u)=0$，则称v与u是正交的，写成$v\perp u$.

n维酉空间的向量$e_1,\cdots,e_n$称为**规格化正交基**，如果它们满足

$$(e_i,e_j)=\delta_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n,$$

其中 $$\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}1, & 当\ \alpha=\beta\ 时\\ 0, & 当\ \alpha\neq\beta\ 时.\end{cases}$$

定理3.1 (Cauchy-Schwarz **不等式**)设V是酉空间，$v,u\in V$，则

$$|(v,u)|\leqslant\|v\|\cdot\|u\|$$

且等号成立当且仅当v与u是线性相关的.

证 当$v=0$时，结论显然成立. 若$v\neq 0$，令$w=u-\dfrac{(u,v)}{\|v\|^2}v$，则$(w,v)=0$，于是

$$0\leqslant(w,w)=(w,u)=(u,u)-\frac{(u,v)}{\|v\|^2}(v,u)$$

$$=\|u\|^2-\frac{|(v,u)|^2}{\|v\|^2}.$$

上式等号成立当且仅当$w=0$即u与v线性相关. ▍

定理3.2 (**三角不等式**) 设V是酉空间，则

$$\|v+u\|\leqslant\|v\|+\|u\|,\quad \forall v,u\in V.$$

证 $$\|v+u\|^2=(v+u,v+u)=(v,v)+(v,u)$$
$$+(\overline{v,u})+(u,u)$$
$$\leqslant(v,v)+2|(v,u)|+(u,u)$$
$$\leqslant\|v\|^2+2\|v\|\|u\|+\|u\|^2$$
$$=(\|v\|+\|u\|)^2.$$ ▍

定理3.3 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是酉空间 V 的规格化正交基，则对任意的 $v,u\in V$ 有

$$v=\sum_{i=1}^{n}(v,e_i)e_i;$$

$$(v,u)=\sum_{i=1}^{n}(v,e_i)(e_i,u).$$

证 因为 $v=\sum_{j=1}^{n}a_je_j$，故 $(v,e_i)=\left(\sum_{j=1}^{n}a_je_j,e_i\right)=\sum_{j=1}^{n}a_j\delta_{ji}=a_i$，$i=1,\cdots,n$. ▍

定理3.4 (Gram-Schmidt **正交化过程**) 设 $v_1,\cdots,v_n$ 是酉空间 V 的任一组基，则能求得规格化正交基 $e_1,\cdots,e_n$ 使得

$$\langle e_1,\cdots,e_k\rangle=\langle v_1,\cdots,v_k\rangle,\quad k=1,\cdots,n,$$

其中 $\langle v_1,\cdots,v_k\rangle$ 表示由 $v_1,\cdots,v_k$ 生成（或叫张成）的子空间.

证 令 $e_1=\dfrac{v_1}{\|v_1\|}$，$e_2=\dfrac{v_2-(v_2,e_1)e_1}{\|v_2-(v_2,e_1)e_1\|},\cdots,$

$$e_n=\frac{v_n-(v_n,e_1)e_1-\cdots-(v_n,e_{n-1})e_{n-1}}{\|v_n-(v_n,e_1)e_1-\cdots-(v_n,e_{n-1})e_{n-1}\|},$$

容易验证 $e_1,\cdots,e_n$ 即为所求的规格化正交基. ▍

对于向量空间 $M_{n,1}$，设 $x=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$y=(b_1,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}\in M_{n,1}$，定义

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{b}_i,$$

很明显这是 $M_{n,1}$ 的一个内积且这个内积使 $M_{n,1}$ 的自然基成为规格化正交基. 故我们称这个内积为 $M_{n,1}$ 的**自然内积**.

类似地 $M_{m,n}$ 也有唯一的一个以 E_{ij} 为规格化正交基的自然内积．（看练习3.4和3.6）

练 习 3

1．设 $e_1,\cdots,e_n$ 是酉空间 V 的基，$v\in V$，证明

$$(v,e_i)=0,\ i=1,\cdots,n\Leftrightarrow v=0.$$

2．设 $v_1,\cdots,v_m$ 和 $u_1,\cdots,u_m$ 是酉空间 V 的两组向量且满足

$$(v_i,u_j)=\delta_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant m,$$

证明这两组向量分别是线性无关的．

3．设 $e_1,\cdots,e_n$ 是酉空间 V 的规格化正交基且 $v=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$，$u=\sum_{i=1}^{n}b_ie_i$，证明 $(v,u)=\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{b}_i$．

4．证明一个内积由一组规格化正交基完全确定．即若 V 上的两个内积(,)和[,]有一组共同的规格化正交基，则这两个内积是相同的．

5．证明任何有限维复数域上的向量空间（维数 $\geqslant 1$）都可以定义无穷多个不同的内积．

6．证明 $M_{m,n}$ 上的自然内积是 $(A,B)=\mathrm{tr}(B^*A)$．其中 $B^*=\bar{B}^{\mathrm{T}}\in M_{n,m}$ 是矩阵 B 的共轭转置，而 $\mathrm{tr}(B^*A)$ 表示方阵 B^*A 的迹．

7．证明不等式：$|\mathrm{tr}(A^*B)|^2\leqslant\mathrm{tr}(A^*A)\mathrm{tr}(B^*B)$，$\forall A,B\in M_{m,n}$．

§4 共轭映射

定理4.1 设向量空间 V 上定义了内积 $(,)_V$，W 上定义了内积 $(,)_W$，设 $T\in L(V,W)$，则存在唯一的 $S\in L(W,V)$ 使得

$$(Tv,w)_W=(v,Sw)_V,\quad \forall v\in V,w\in W.$$

证 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 上的规格化正交基，对任意的 $w\in W$，定义

$$Sw=\sum_{i=1}^{n}(w,Te_i)_W e_i,$$

显然 $S\in L(W,V)$. 对任意的 $v\in V$，用定理3.3有 $v=\sum_{i=1}^{n}(v,e_i)_V e_i$，于是

$$\begin{aligned}(v,Sw)_V&=\Big(v,\ \sum_{i=1}^{n}(w,Te_i)_W e_i\Big)_V\\&=\sum_{i=1}^{n}(Te_i,w)_W(v,e_i)_V\\&=\Big(T\sum_{i=1}^{n}(v,e_i)_V e_i,w\Big)_W=(Tv,w)_W.\end{aligned}$$

S 的唯一性看练习4.1. ▌

由定理4.1唯一确定的线性映射 S 称为 T 的**共轭映射**，用符号 T^* 表示. 显然有 $(T^*)^*=T$.

定理4.2 设 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$，$F=\{f_1,\cdots,f_m\}$ 分别是酉空间 V 和 W 的规格化正交基，若 $T\in L(V,W)$，则 $[T^*]_F^E=([T]_E^F)^*$. (上式右边的 $*$ 号表示矩阵的共轭转置)

证 设$[T]_E^F=A$，即$Te_j=\sum_{k=1}^{m}a_{kj}f_k$，于是$(Te_j,f_i)_W=a_{ij}$. 由定理4.1有$T^*f_j=\sum_{i=1}^{n}(f_j,Te_i)_W e_i=\sum_{i=1}^{n}\overline{(Te_i,f_j)_W}\,e_i=\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_{ji}e_i$. 故$[T^*]_F^E=\bar{A}^{\mathrm{T}}=A^*=([T]_E^F)^*$. ▎

注意若E或F不是规格化正交的则定理4.2不成立（看练习 4.4）. 也有共轭映射T^*与两向量空间所定义的内积有关，内积不同其共轭映射一般也不同（看以后练习6.4）.

练　习　4

1. 设$T,H\in L(V,W)$，V，W都是酉空间，证明

（i）$(Tv,w)_W=0$，$\forall v\in V,w\in W\Leftrightarrow T=0$；

（ii）$(Tv,w)_W=(Hv,w)_W$，$\forall v\in V,w\in W\Leftrightarrow T=H$.

2. 设V,W,U都是酉空间，$T\in L(V,W)$，$S\in L(W,U)$，证明$(ST)^*=T^*S^*$.

3. 设E，E'是酉空间V的两组规格化正交基，$I\in L(V,V)$是V上的恒等算子，证明

$$([I]_E^{E'})^*=([I]_E^{E'})^{-1}=[I]_{E'}^E.$$

（提示：$I=I^{-1}=I^*$）

4. 设$T\in L(V,V)$，G是酉空间V的任一组基，证明$[T^*]_G^G$与$([T]_G^G)^*$是相似方阵.

（提示：设E是V的一组规格化正交基，记过渡矩阵$P=[I]_G^E$，则可推得$[T^*]_G^G=(P^*P)^{-1}([T]_G^G)^*(P^*P)$.）

5. 设V,W是酉空间，$T\in L(V,W)$，证明

$\rho(T)=\rho(T^*)$.

§5 规范算子与规范矩阵

算子（或方阵）的特征值和特征向量是很重要的量．下面是在内积空间中具有由特征向量所组成的规格化正交基的一类常用算子的定义和一些性质.

下面定义中的 A 既可以是 $L(V,V)$ 上的算子又可以是 n 阶方阵，其中 V 是酉空间．当 $A\in M_n$ 时，V 为带有自然内积的 $M_{n,1}$.

A 称为**规范的**，如果 $A^*A=AA^*$.

A 称为**厄米特的**，如果 $A=A^*$.

A 称为**正定的**，写为 $A>0$，如果 A 是厄米特的且$(Ax,x)>0$，$\forall 0\neq x\in V$.

A 称为**非负定的**，写为 $A\geqslant 0$，如果 A 是厄米特的且$(Ax,x)\geqslant 0$，$\forall x\in V$.

A 称为**酉的**，如果 $A^*A=I$.（I 是恒等算子或单位方阵）

显然后面四种是规范的特殊情形．容易验证酉算子（或酉矩阵）相乘仍是酉的．也有 n 阶酉矩阵的列向量组成 $M_{n,1}$ 的规格化正交基，反之 $M_{n,1}$ 的任一组规格化正交基排成 n 列就是一个酉矩阵.

设 A 是规范的，U 是酉的（即 $U^*=U^{-1}$），令 $B=U^*AU$，则 $B^*B=(U^*AU)^*(U^*AU)=U^*A^*AU=U^*AA^*U=U^*AU(U^*AU)^*=BB^*$，故规范算子（或规范矩阵）经过酉相似变换后仍是规范的．类似地可验证其它四种算子经过

酉相似变换后还是原来那种算子．这里要注意，一般相似变换不具有这种特性．

下面是酉相似变换的一个重要结论，它使得许多问题的证明能大大简化．

定理5.1 （Schur三角化定理）任何方阵 $A\in M_n$ 都酉相似于上三角矩阵．即存在酉矩阵 $U\in M_n$ 使 U^*AU 是上三角矩阵．

证 设 λ_1, x_1 是 A 的一个特征值及对应的单位特征向量，即 $Ax_1=\lambda_1 x_1$ 且 $\|x_1\|=1$．补充 $x_2,\cdots,x_n$ 使 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 成为 $M_{n,1}$ 的规格化正交基．令 x_j 组成矩阵 Q 的第 j 列，$j=1,\cdots,n$，于是 Q 是酉矩阵且

$$Q^*Ax_1=\lambda_1 Q^*x_1=\begin{pmatrix}\lambda_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},$$

也有

$$Q^*AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & *\\0 & & & \\\vdots & & A_1 & \\0 & & & \end{pmatrix}.$$

应用简单的归纳法，知存在 $U_1\in M_{n-1}$ 使 $U_1^*A_1U_1$ 成为上三角矩阵．注意到

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & & & \\\vdots & & U_1 & \\0 & & & \end{pmatrix}$$

是酉矩阵且

$$P^*\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}P=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & U_1^*A_1U_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

是上三角矩阵，令 $U=QP$，则 U^*AU 就是上三角矩阵. ▌

这里顺便提一下，因为相似方阵有相同的特征值，故上三角矩阵 U^*AU 的对角线元素即为 A 的全部特征值. 也有 A 的迹等于 A 的全部特征值之和，A 的行列式等于 A 的全部特征值之积.

下面是 Schur 定理关于线性算子的形式，也是以后要经常用到的.

定理5.2 设 T 是酉空间 V 上的任意线性算子，则存在规格化正交基 E，使其矩阵表示 $[T]_E^E$ 是上三角矩阵.

证 设 $E'=\{e_1',\cdots,e_n'\}$ 是 V 的任一组规格化正交基，令 $[T]_{E'}^{E'}=A$，由定理 5.1 知必存在酉矩阵 $U=(u_{ij})\in M_n$，使 U^*AU 是上三角矩阵. 令 $e_j=\sum\limits_{i=1}^{n}u_{ij}e_i'$，$j=1,\cdots,n$，因为 $(e_i,e_j)=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}u_{ki}e_k',\ \sum\limits_{l=1}^{n}u_{lj}e_l'\right)=\sum\limits_{k,l=1}^{n}u_{ki}\bar{u}_{lj}\delta_{kl}=\sum\limits_{k=1}^{n}u_{ki}\cdot\bar{u}_{kj}=\delta_{ij}$，故 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是一组规格化正交基且 $[I]_E^{E'}=U$. 于是 $[T]_E^E=[I]_{E'}^{E}[T]_{E'}^{E'}[I]_E^{E'}=U^*AU$ 是上三角矩阵. ▌

定理5.3 规范矩阵中若第 r 行除对角线元素外都为0，则第 r 列的元素除对角线元素外也都为 0 .

证 由 $a_{rj}=0$，$j\neq r, j=1,\cdots,n$ 及 $AA^*=A^*A$ 知

$$(AA^*)_{rr}=\sum_{j=1}^{n}|a_{rj}|^2=|a_{rr}|^2=(A^*A)_{rr}=$$

$$=|a_{rr}|^2+\sum_{\substack{i=1\\i\neq r}}^{n}|a_{ir}|^2.$$

故 $a_{ir}=0$，$i\neq r$，$i=1,\cdots,n$. ∎

由此定理立即得到：

定理5.4 上三角形的规范矩阵 A 必是对角线矩阵. ∎

再由定理5.1就得：

定理5.5 A 是规范矩阵 $\Leftrightarrow$ A 酉相似于对角线矩阵. ∎

练 习 5

1. 证明 A 是规范的 $\Leftrightarrow$ 存在一个由A的特征向量组成的规格化正交基.

2. 证明 A 是厄米特的（正定的，非负定的，酉的）$\Leftrightarrow$ A 是规范的且特征值是实数（正数，非负数，绝对值等于1）.

3. 证明 A 是酉的 $\Leftrightarrow \|Ax\|=\|x\|$，$\forall x\in V$.

4. 设 V 是酉空间，证明下面的结论：（注意实内积空间时不成立）

(i) $(Ax,x)=0$，$\forall x\in V \Leftrightarrow A=0$；

(ii) A 是厄米特的 $\Leftrightarrow (Ax,x)$是实数，$\forall x\in V$；

(iii) A 是正定的 $\Leftrightarrow (Ax,x)>0$，$\forall\, 0\neq x\in V$；

(iv) A 是非负定的 $\Leftrightarrow (Ax,x)\geqslant 0$，$\forall x\in V$.

5. 设 $T\in L(V,W)$，V,W 为内积空间，证明 $T^*T\geqslant 0$，$TT^*\geqslant 0$. 又若 T 是可逆的，则 $T^*T>0$，$TT^*>0$.

6. 证明方阵 $A\geqslant 0 \Leftrightarrow$ 存在方阵 B 使 $A=B^*B$.

（提示：由 $A\geqslant 0$，存在酉矩阵 U，使 $UAU^*=\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 且 $\lambda_i\geqslant 0$，$i=1,\cdots,n$，令 $D=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})$，则 $B=DU$.）

7. 证明方阵 $A>0 \Leftrightarrow$ 存在可逆方阵 B 使 $A=B^*B$.

8. 对于任意方阵 A，证明存在酉矩阵 U，使 UA 是上三角矩阵.

9. 证明方阵 $A\geqslant 0 \Leftrightarrow$ 存在上三角矩阵 L 使 $A=L^*L$.

10. 设 V 是 n 维内积空间，$A=(a_{ij})\in M_n$，证明

（i） $A\geqslant 0 \Leftrightarrow$ 存在 $v_1,\cdots,v_n\in V$，使 $a_{ij}=(v_i,v_j)$，$1\leqslant i,j\leqslant n$.

（ii） $A>0 \Leftrightarrow$ 存在线性无关的 $v_1,\cdots,v_n\in V$，使 $a_{ij}=(v_i,v_j)$，$1\leqslant i,j\leqslant n$.

§6 内积与正定算子

本节讨论内积与正定算子的关系. 因为共轭算子与内积有关，故上一节的五种规范算子都是与内积有关的. 例如一个线性算子 T 关于某个内积是正定的，关于另一个内积就可能不是正定的（练习6.2）. 另外不同的内积还与正定算子有下面的密切关系.

定理6.1 设 $(\,,\,)$ 是 V 上的一个内积，$T\in L(V,V)$，定义复值函数 $[v,u]=(Tv,u)$，则 $[\,,\,]$ 为一个内积的充要条件是 T 关于内积 $(\,,\,)$ 是正定的.

证 当 T 关于内积 $(\,,\,)$ 是正定时，$[\,,\,]$ 是一内积是显然的. 现假定 $[v,u]=(Tv,u)$ 是一个内积，那么由定义就有 $[v,u]=\overline{[u,v]}$，于是 $(Tv,u)=\overline{(Tu,v)}=(T^*v,u)$，故 $T=$

T^*（这里 T^* 是 T 关于内积 $(,)$ 的共轭算子）. 又当 $v\neq 0$ 时，$0<[v,v]=(Tv,v)$，因此 T 关于内积 $(,)$ 是正定的. ▌

定理6.2 设 $(,)$，$[,]$ 是 V 上的两个内积，则存在唯一的线性算子 $T\in L(V,V)$，使 $[v,u]=(Tv,u)$，$\forall v,u\in V$ 并且 T 关于两个内积都是正定的.

证 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 上关于内积 $(,)$ 的规格化正交基，则对任意的 $u\in V$ 有 $u=\sum_{i=1}^{n}(u,e_i)e_i$. 对 $v\in V$，定义

$$Tv=\sum_{i=1}^{n}[v,e_i]e_i,$$

显然 $T\in L(V,V)$ 且 $(Tv,u)=\sum_{i=1}^{n}[v,e_i](e_i,u)=[v,\sum_{i=1}^{n}(u,e_i)e_i]=[v,u]$. 由定理 6.1 知 T 关于内积 $(,)$ 是正定的. 又当 $v\neq 0$ 时，$[Tv,v]=(T^2v,v)>0$，故 T 关于内积 $[,]$ 也是正定的. T 的唯一性由练习4.1表明. ▌

定理6.3 设 $f_1,\cdots,f_n$ 是向量空间 V 的任一组基，则 V 上存在唯一的一个内积使 $f_1,\cdots,f_n$ 关于这个内积成为规格化正交基.

证 设 $(,)$ 是 V 上的任一内积，$e_1,\cdots,e_n$ 为其规格化正交基，则由练习1.4知满足 $Sf_i=e_i$，$i=1,\cdots,n$ 所唯一确定的 $S\in L(V,V)$ 是可逆的. 令 $T=S^*S$（这里 S^* 是关于内积 $(,)$ 的且由练习 5.5 知关于这个内积 $T>0$)，容易验证 $[v,u]=(Tv,u)$ 是以 $f_1,\cdots,f_n$ 为其规格化正交基的唯一内积. ▌

练 习 6

1. 设 $f_1,\cdots,f_n$ 是 V 的任一组基，对于 $v=\sum_{i=1}^{n}a_if_i$，$u=\sum_{i=1}^{n}b_if_i$，定义 $(v,u)=\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{b}_i$，证明这是以 $f_1,\cdots,f_n$ 为其规格化正交基的唯一内积.

2. 举例说明存在线性算子 $T\in L(V,V)$ 及 V 上的两个内积使 T 关于其中一个内积是正定的，关于另一个内积则不是正定的.

3. 设 V 是 n 维内积空间，证明对任意的 $A=(a_{ij})\in M_n$，必存在 $2n$ 个向量 $v_1,\cdots,v_n$，$u_1,\cdots,u_n$ 使

$$a_{ij}=(v_i,u_j),\quad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

4. 设 $T\in L(V,V)$，V 上定义了两个内积(,)和[,]. 又设 T 关于内积(,)的共轭算子为 $T^{(*)}$，关于内积[,]的共轭算子为 $T^{[*]}$，证明 $T^{(*)}$ 与 $T^{[*]}$ 相似.

§7 线性映射的限制与不变子空间

定理7.1 设 $W\subset V$ 是 V 的子空间，则对任意的 $T\in L(V,U)$，存在唯一的 $T_1\in L(W,U)$ 使

$$T_1w=Tw,\quad \forall w\in W.$$ ▌

定理的证明是显然的. T_1 称为 T 在子空间 W 上的限制，通常写作 $T_1=T|_W$.

设 W 是 V 的子空间，$T\in L(V,V)$，如果对任意 $w\in W$

都有$Tw\in W$，即$T(W)\subset W$，则称W为算子T的**不变子空间**. 显然零空间$\{0\}$和V本身都是T的不变子空间，称为平凡不变子空间，其余的不变子空间称为非平凡不变子空间.

对于线性算子$T\in L(V,V)$，若W是T的不变子空间，则$T|_W$显然确定W上一个线性算子，即$T|_W\in L(W,W)$. 又若T是可逆的，则$T|_W$显然也是可逆的.

定理7.2 设V是内积空间，$T\in L(V,V)$，W同时是T和T^*的不变子空间，则有

(a) $(T|_W)^*=T^*|_W$（左边的*号是关于V的内积在W上的限制）

(b) 若T分别是规范的、厄米特的、正定的、非负定的、酉的，则$T|_W$也相应是.

（事实上当T是规范算子时，由W是T的不变子空间就能推得W是T^*的不变子空间. 例如看[9,p.347]）

证 (a) 对任意的$x,y\in W$，由线性映射限制的定义有$(T|_W)x=Tx$，$(T^*|_W)y=T^*y$. 又由T和T^*保持W不变就得

$$\begin{aligned}((T|_W)x,y)_W&=(Tx,y)_V=(x,T^*y)_V\\&=(x,(T^*|_W)y)_W.\end{aligned}$$

再由共轭算子的定义即得$(T|_W)^*=T^*|_W$.

(b) 由$(T|_W)(T^*|_W)=(TT^*)|_W$（练习7.3）即可证得. ∎

练 习 7

1. 设W是V的子空间，$T_1\in L(W,U)$，证明存在

$T\in L(V,U)$使得$T|_W=T_1$.

2. 证明线性映射之和的限制等于线性映射的限制之和. 即若$S,T\in L(V,U)$, W是V的子空间, $a\in\mathbf{C}$, 则

$$(S+aT)|_W=S|_W+a(T|_W).$$

3. 设$S,T\in L(V,V)$, W同时是S与T的不变子空间, 证明W是ST的不变子空间且有

$$(ST)|_W=(S|_W)(T|_W).$$

4. 设$T\in L(V,V)$, $S\in L(W,W)$, $H\in L(V,W)$且满足$SH=HT$, 证明$\mathrm{Im}H$是S的不变子空间, $\mathrm{Ker}H$是T的不变子空间.

§8 投影算子与子空间直和

V的m个子空间$W_1,\cdots,W_m$的和是

$$W_1+\cdots+W_m=\{w_1+\cdots+w_m\mid w_i\in W_i,i=1,\cdots,m\}.$$

如果对于每个向量$v\in W_1+\cdots+W_m$能唯一地分解为$v=w_1+\cdots+w_m$, 其中$w_i\in W_i,i=1,\cdots,m$, 则和称为直接的（直和), 并记为$W_1\oplus\cdots\oplus W_m$; 又如果$V$是内积空间且当$i\neq j$时$W_i$与$W_j$正交（即$(w_i,w_j)=0$, $\forall w_i\in W_i,w_j\in W_j$), 则和称为正交和, 记为$W_1\perp\cdots\perp W_m$. 显然正交和一定是直和.

若W是V的子空间, 则称$W^\perp=\{v\in V\mid(w,v)=0,\forall w\in W\}$为$W$的正交补. 显然有$V=W\perp W^\perp=W\oplus W^\perp$.

对于$P\in L(V,V)$, 如果$P^2=P$, 则称P为投影或投影算子, $\mathrm{Im}P$称为P的投影子空间. 若V为内积空间且$P=P^*=P^2$, 则称P为正交投影.

投影或正交投影对向量空间的分解起着重要的作用．我们先来证明投影算子的一个重要性质．

定理8.1 设 P 是 V 上的投影算子，即 $P^2=P$，则 $\rho(P)=\mathrm{tr}(P)$．

证 设 $\rho(P)=k$，由定理1.3知存在 V 的基 $v_1,\cdots,v_n$ 使 $Pv_1,\cdots,Pv_k$ 线性无关而 $Pv_{k+1}=\cdots=Pv_n=0$．利用 $P^2=P$ 容易看出 $E=\{Pv_1,\cdots,Pv_k,\ v_{k+1},\cdots,v_n\}$ 是线性无关组因而也是 V 的一组基．于是得 $[P]_E^E=\mathrm{diag}(\overbrace{1,\cdots,1}^{k},\ 0,\cdots,0)$（对角线矩阵），故 $\rho(P)=\mathrm{tr}(P)=k$． ▎

这定理还说明投影算子的特征值不是1就是0．下面的定理表明投影算子与向量空间直和分解的密切关系．

定理8.2 设 $P_1,\cdots,P_m$ 是 V 上的投影算子且 $P_1+\cdots+P_m=I_V$，则 V 可分解为投影子空间的直和，即 $V=\mathrm{Im}P_1\oplus\cdots\oplus\mathrm{Im}P_m$；反之若 $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_m$，则存在唯一的 m 个投影算子 $P_1,\cdots,P_m$ 使 $P_1+\cdots+P_m=I_V$ 及 $\mathrm{Im}P_i=W_i$，$i=1,\cdots,m$．

证 由 $P_1+\cdots+P_m=I_V$，故对任意的 $v\in V$，有 $v=P_1v+\cdots+P_mv$，这说明 $V=\mathrm{Im}P_1+\cdots+\mathrm{Im}P_m$．再用定理8.1就得 $\dim V=\rho(I_V)=\mathrm{tr}(I_V)=\mathrm{tr}(P_1)+\cdots+\mathrm{tr}(P_m)=\rho(P_1)+\cdots+\rho(P_m)=\dim(\mathrm{Im}P_1)+\cdots+\dim(\mathrm{Im}P_m)$．这就表明 $V=\mathrm{Im}P_1\oplus\cdots\oplus\mathrm{Im}P_m$（练习8.1）．反之若 $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_m$，则对任意 $v\in V$，有唯一分解 $v=w_1+\cdots+w_m$，其中 $w_i\in W_i$，$i=1,\cdots,m$，定义 $P_i\in L(V,V)$ 使用 $P_iv=w_i$，容易验证 P_i 是投影算子且 $\mathrm{Im}P_i=W_i$，$i=1,\cdots,m$ 及 $P_1+\cdots+P_m=I_V$．又若还有一组投影算子 $Q_1,\cdots,Q_m$

也满足 $Q_1+\cdots+Q_m=I_V$ 及 $\mathrm{Im}Q_i=W_i$，$i=1,\cdots,m$，则对任意 $v\in V$，由 v 分解的唯一性即得 $Q_iv=P_iv$，故 $Q_i=P_i$，$i=1,\cdots,m$. ▎

练 习 8

1. 设 $V=W_1+\cdots+W_m$，证明和为直和的充要条件是 $\dim V=\dim W_1+\cdots+\dim W_m$.

2. 证明若 P 是 V 上的投影算子，则 $V=\mathrm{Im}P\oplus\mathrm{Ker}P$；反之若 $V=W\oplus W'$，则存在唯一的投影算子 P 使 $\mathrm{Im}P=W$，$\mathrm{Ker}P=W'$.

3. 设 $P_1,\cdots,P_m$ 是 V 上的投影算子且 $P_1+\cdots+P_m=I_V$，证明当 $i\neq j$ 时，$P_iP_j=0$.

（提示：用定理8.2）

4. 设 $P_1,\cdots,P_m$ 是 V 上的投影算子，证明 $P_1+\cdots+P_m$ 仍为投影算子的充要条件是当 $i\neq j$ 时，$P_iP_j=0$.

5. 设 P 为内积空间 V 上的正交投影，证明 P 是非负定的且 $\|Pv\|\leqslant\|v\|$，$\forall v\in V$.

6. 设 $P_1,\cdots,P_m$ 是内积空间 V 上的正交投影且 $P_1+\cdots+P_m=I_V$，证明 $V=\mathrm{Im}P_1\perp\cdots\perp\mathrm{Im}P_m$.

7. 设 $P_1,\cdots,P_m$ 都是 V 上的投影算子且 $P_1+\cdots+P_m=I_V$，证明可在 V 上定义一个内积使所有 P_i 都成为正交投影.

8. 证明若 P 是 V 上的投影算子，W 是 P 的不变子空间，则 $P|_W$ 是 W 上的投影算子.

§9 对偶空间与卡氏积空间

当 $f\in L(V,\boldsymbol{C})$时，f 被称为线性函数．自然它具有一般线性映射的性质．但由于 $\boldsymbol{C}$ 的特殊性，使得线性函数类具有一些特殊性质，而这些性质对我们以后的研究又具有基本的重要性，故我们特别记 $V^*=L(V,\boldsymbol{C})$并称之为 V 的**对偶空间**．

定理9.1 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的基，又设 $f_1,\cdots,f_n$ 是满足条件

$$f_i(e_j)=\delta_{ij},\quad i,j=1,\cdots,n$$

并由线性扩张定理唯一确定的 n 个线性函数，则 $f_1,\cdots,f_n$ 是 V^*的基．

证 首先我们证明任意的 $f\in V^*$可用 $f_1,\cdots,f_n$ 线性表示，事实上，$f=\sum\limits_{i=1}^{n} f(e_i)f_i$，这是因为左右两边的线性函数在 V 的基 $e_1,\cdots,e_n$ 上取相同的值 $f(e_1),\cdots,f(e_n)$．其次若 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_if_i=0$，则 $0=\sum\limits_{i=1}^{n} a_if_i(e_j)=a_j$，$j=1,\cdots,n$，故 $f_1,\cdots,f_n$ 是线性无关的，因而它们是 V^*的基．

由 V 的基 $e_1,\cdots,e_n$ 唯一确定的满足 $f_i(e_j)=\delta_{ij}$ 的线性函数 $f_1,\cdots,f_n$ 称为 $e_1,\cdots,e_n$ 的**对偶基**．

这样上定理又可写为：若 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的基，则其对偶基必是 V^*的基．

定理9.2 设 V 是内积空间，$f\in V^*$是任一线性函数，则存在唯一的 $u\in V$，使得 $f(v)=(v,u)$，$\forall v\in V$．

证　设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 V 的规格化正交基。令 $u = \sum_{j=1}^{n} \overline{f(e_j)} e_j$，则 $(v,u) = \left(v, \sum_{j=1}^{n} \overline{f(e_j)} e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} f(e_j)(v, e_j)$ $= f\left(\sum_{j=1}^{n}(v, e_j) e_j\right) = f(v)$，$\forall v \in V$。唯一性显然。 |

下面说一下 $V_1, \cdots, V_m$ 的卡氏积空间，这也是后面常用的概念。

设 $V_1, \cdots, V_m$ 是 m 个（维数可以不等）向量空间，考虑集合

$$X = \{(v_1, \cdots, v_m) \mid v_i \in V_i, \ i = 1, \cdots, m\}$$

规定集合中元素 $(v_1, \cdots, v_m) = (u_1, \cdots, u_m)$ 当且仅当 $v_i = u_i$，$i = 1, \cdots, m$。并对集合的元素定义加法和数乘如下：

$$(v_1, \cdots, v_m) + a(u_1, \cdots, u_m) = (v_1 + au_1, \cdots, v_m + au_m),$$

其中 $a \in \mathbf{C}$，则集合 X 成为一个向量空间，记作 $V_1 \times \cdots \times V_m$，它被称为 $V_1, \cdots, V_m$ 的**卡式积空间**，简记为 $\overset{m}{\underset{1}{\times}} V_i$。

练　习　9

1． 假定 $e_1, \cdots, e_n$ 是内积空间 V 的规格化正交基，证明 V^* 的 $f_1, \cdots, f_n$ 是其对偶基的充要条件是 $f_j(v) = (v, e_j)$，$\forall v \in V$，$j = 1, \cdots, n$。

2． 证明若 $f_1, \cdots, f_n$ 是 V^* 的基且 $f_j(v) = 0$，$j = 1, \cdots, n$，则 $v = 0$。

3． 若 $f_1, \cdots, f_n$ 是 V^* 的基，证明 V 中存在唯一的基 $e_1, \cdots, e_n$ 使得 $f_i(e_j) = \delta_{ij}$，$1 \leqslant i, j \leqslant n$。

（提示：在 V 上定义内积，由 $f_i(v)=(v,u_i)$确定 V 的基 $u_1,\cdots,u_n$，又由定理6.3知存在 $T>0$ 使$(Tu_i,u_j)=\delta_{ij}$，则 $e_i=Tu_i$ 为所求。）

4． 设 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$， $E'=\{e_1',\cdots,e_n'\}$是 V 的两组基，其对偶基分别为 $F=\{f_1,\cdots,f_n\}$， $F'=\{f_1',\cdots,f_n'\}$，若记它们的过渡矩阵分别为$[I_V]_{E'}^{E}=P$， $[I_{V^*}]_{F'}^{F}=Q$， 证明 $Q=(P^{-1})_{\mathrm{T}}$。（Q 称为 P 的反变矩阵）

5． 证明$\dim(V_1\times\cdots\times V_m)=\dim V_1+\cdots+\dim V_m$并写出$\overset{m}{\underset{1}{\times}}V_i$ 的一组基。（可设 V_i 的一组基为$\{e_{i1},\cdots,e_{in_i}\}$，$n_i=\dim V_i$，$i=1,\cdots,m$）

§10 序列集合的记号与行列式定理

本节所介绍的符号是本课程的常用符号，引进这些符号使许多定理的叙述和证明都大为简练。

S_m 表示 m 阶置换群，置换 $\sigma\in S_m$ 表示成

$\sigma=\begin{pmatrix}1, & \cdots, & m\\ \sigma(1), & \cdots, & \sigma(m)\end{pmatrix}$，其中 $\sigma(1),\cdots,\sigma(m)$是前 m 个自然数的一个排列。$\varepsilon(\sigma)$表示置换 σ 的符号，即

$$\varepsilon(\sigma)=\begin{cases}1, & \text{如果 }\sigma\text{ 是奇置换,}\\ -1, & \text{如果 }\sigma\text{ 是偶置换.}\end{cases}$$

α,β,γ 等表示以自然数为分量的有限序列，下面是常用的序列集合：

$$\Gamma(n_1,\cdots,n_m)=\{\alpha\}\alpha=(\alpha(1),\cdots,\alpha(m)),$$
$$1\leqslant\alpha(i)\leqslant n_i,\ i=1,\cdots,m\};$$

$$\Gamma_{m,n}=\{\alpha \mid \alpha=(\alpha(1),\cdots,\alpha(m)),$$
$$1\leqslant\alpha(i)\leqslant n,\ i=1,\cdots,m\};$$
$$G_{m,n}=\{\alpha \mid \alpha\in\Gamma_{m,n},\ \alpha(1)\leqslant\cdots\leqslant\alpha(m)\};$$
$$D_{m,n}=\{\alpha \mid \alpha\in\Gamma_{m,n},\ \text{当 } i\neq j \text{ 时 } \alpha(i)\neq\alpha(j)\};$$
$$Q_{m,n}=\{\alpha \mid \alpha\in\Gamma_{m,n},\ \alpha(1)<\cdots<\alpha(m)\}.$$

对于 $\alpha\in Q_{m,n}$, $\sigma\in S_m$, 若定义 $\alpha\sigma=(\alpha(\sigma(1)),\cdots,\alpha(\sigma(m)))$, 则显然有 $\alpha\sigma\in D_{m,n}$, 而且

$$D_{m,n}=\{\alpha\sigma \mid \alpha\in Q_{m,n},\ \sigma\in S_m\}. \qquad (1)$$

对于 $\omega\in Q_{m,n}$, 若用 ω' 表示 ω 的补序列, 即 $\omega'\in Q_{n-m,n}$ 且 ω 与 ω' 的分量组成前 n 个自然数, 则可用 ω 与 ω' 构成 S_n 的一个置换, 即

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1, & \cdots, & m, & m+1,\cdots, & n \\ \omega(1), & \cdots, & \omega(m), & \omega'(1),\cdots, & \omega'(n-m) \end{pmatrix}\in S_n,$$

容易算得

$$\varepsilon(\sigma)=(-1)^{s(\omega)+m(m+1)/2}, \qquad (2)$$

其中 $s(\omega)=\omega(1)+\cdots+\omega(m)$. (这是因为置换 σ 的奇偶性取决于其第二个排列的反序数的奇偶性. 但在这个排列中, $\omega(i)$ 右面比 $\omega(i)$ 小的数的个数是 $\omega(i)-i$, $i=1,\cdots,m$, 而 $\omega'(j)$ 右面的数都比 $\omega'(j)$ 大, $j=1,\cdots,n-m$, 故第二排的反序数为 $\sum_{i=1}^{m}(\omega(i)-i)=s(\omega)-m(m+1)/2$, 于是得 $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{s(\omega)-m(m+1)/2}=(-1)^{s(\omega)+m(m+1)/2}$).

类似地对于 $\omega\in Q_{m,n}$, $\theta\in S_m$, $\pi\in S_{n-m}$, 则

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1, & \cdots, & m, & m+1, & \cdots, & n \\ \omega\theta(1), & \cdots, & \omega\theta(m), & \omega'\pi(1), & \cdots, & \omega'\pi(n-m) \end{pmatrix}\in S_n$$

且

$$\varepsilon(\sigma)=\varepsilon(\pi)(-1)^{s(\omega)+m(m+1)/2}, \qquad (3)$$

更有

$$S_n=\left\{\sigma=\begin{pmatrix}1, & \cdots, & m, & m+1, & \cdots, & n\\ \omega\theta(1), & \cdots, & \omega\theta(m), & \omega'\pi(1), & \cdots, & \omega'\pi(n-m)\end{pmatrix}\right.$$

$$\left|\omega\in Q_{m,n},\ \theta\in S_m,\ \pi\in S_{n-m}\right\}. \qquad (4)$$

设$A=(a_{ij})\in M_{n,k}$，对于$1\leqslant m\leqslant n, 1\leqslant l\leqslant k, \alpha\in Q_{m,n}$，$\beta\in Q_{l,k}$，用$A[\alpha|\beta]$表示$A$中$\alpha(1),\cdots,\alpha(m)$行与$\beta(1)$，$\cdots,\beta(l)$列相交的元素组成的子矩阵，即$A[\alpha|\beta]\in M_{m,l}$，其$(i,j)$位置上的元素是$a_{\alpha(i)\beta(j)}$。$A(\alpha|\beta)=A[\alpha'|\beta']\in M_{n-m,k-l}$则表示$A$中去掉$\alpha$行$\beta$列后余下的子矩阵。

设$A\in M_n$是n阶方阵，则A的行列式$\det A$可写为

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)}. \qquad (5)$$

容易推得对任意$\pi\in S_n$有

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\pi)\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\pi(i)\sigma(i)}. \qquad (6)$$

对于m阶子矩阵的行列式即m阶子式也有类似的表达修。例如$A\in M_{n,k}$，$1\leqslant m\leqslant \min\{n,k\}, \alpha\in Q_{m,n}, \beta\in Q_{m,k}$，则

$$\det A[\alpha|\beta]=\sum_{\sigma\in S_m}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{m}a_{\alpha(i)\beta_\sigma(i)}.$$

对于$\theta\in S_m$则成立

$$\det A[\alpha\theta|\beta]=\det A[\alpha|\beta\theta]=\varepsilon(\theta)\det A[\alpha|\beta]. \qquad (7)$$

当$\alpha\in\Gamma_{m,n}$，$\beta\in\Gamma_{m,k}$时，$A[\alpha|\beta]$也是有意义的，即

$A[\alpha|\beta]\in M_m$，其(i,j)位置上的元素是$a_{\alpha(i)\beta(j)}$。但当$\alpha\in\Gamma_{m,n}$，$\alpha\notin D_{m,n}$时则意味着矩阵$A[\alpha|\beta]$至少有两行元素相同，故

$$\det A[\alpha|\beta]=0,\ 当\ \alpha\in\Gamma_{m,n}\ 而\ \alpha\notin D_{m,n}\ 时。\tag{8}$$

为了熟悉所介绍的符号，减少以后推算的困难，我们现在做一些推算练习，它们本身也是很有意思的。下面是两个著名行列式定理的符号证明。

定理10.1 (Cuchy-Binet) 设$A\in M_{r,n}$，$B\in M_{n,l}$，$C=AB$。则对于$1\leqslant m\leqslant\min\{r,n,l\}$及任意的$\alpha\in Q_{m,r}$，$\beta\in Q_{m,l}$，有

$$\det C[\alpha|\beta]=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}\det A[\alpha|\omega]\det B[\omega|\beta].$$

证
$$\det C[\alpha|\beta]=\sum_{\sigma\in S_m}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{m}c_{\alpha(i)\beta\sigma(i)}$$

$$=\sum_{\sigma\in S_m}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{\alpha(i)j}b_{j\beta\sigma(i)}$$

$$=\sum_{\sigma\in S_m}\varepsilon(\sigma)\sum_{\gamma\in\Gamma_{m,n}}\sum_{i=1}^{m}a_{\alpha(i)\gamma(i)}\cdot b_{\gamma(i)\beta\sigma(i)}\qquad(练习10.2)$$

$$=\sum_{\gamma\in\Gamma_{m,n}}\prod_{i=1}^{m}a_{\alpha(i)\gamma(i)}\Big(\sum_{\sigma\in S_m}\varepsilon(\sigma)\cdot\prod_{i=1}^{m}b_{\gamma(i)\beta\sigma(i)}\Big)$$

$$=\sum_{\gamma\in\Gamma_{m,n}}\prod_{i=1}^{m}a_{\alpha(i)\gamma(i)}\det B[\gamma|\beta]$$

$$= \sum_{\gamma \in D_{m,n}} \prod_{i=1}^{m} a_{\alpha(i)\gamma(i)} \det B[\gamma|\beta] \qquad (\text{用}(8))$$

$$= \sum_{\omega \in Q_{m,n}} \sum_{\sigma \in S_m} \prod_{i=1}^{m} a_{\alpha(i)\omega\sigma(i)} \det B[\omega\sigma|\beta] \quad (\text{用}(1))$$

$$= \sum_{\omega \in Q_{m,n}} \left(\sum_{\sigma \in S_m} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{m} a_{\alpha(i)\omega\sigma(i)} \right) \det B[\omega|\beta]$$

(用(7))

$$= \sum_{\omega \in Q_{m,n}} \det A[\alpha|\omega] \det B[\omega|\beta]. \qquad |$$

定理10.2 (Laplace)设 $A \in M_n$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $\alpha \in Q_{m,n}$. 则

$$\det A = \sum_{\omega \in Q_{m,n}} \det A[\alpha|\omega](-1)^{s(\alpha)+s(\omega)} \det A(\alpha|\omega).$$

证 上式右边 $=(-1)^{s(\alpha)} \sum_{\omega \in Q_{m,n}} (-1)^{s(\omega)}$

$$\cdot \det A[\alpha|\omega] \det A[\alpha'|\omega']$$

$$= (-1)^{s(\omega)} \sum_{\omega \in Q_{m,n}} \sum_{\theta \in S_m} \sum_{\pi \in S_{n-m}} \varepsilon(\theta)$$

$$\cdot \varepsilon(\pi)(-1)^{s(\omega)} \prod_{i=1}^{m} a_{\alpha(i)\omega\theta(i)}$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{n-m} a'_{\alpha(j)}{}'_{\omega\pi(j)}$$

$$= (-1)^{s(\alpha)} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{m(m+1)/2}$$

$$\cdot \prod_{i=1}^{m} a_{\alpha(i)\sigma(i)} \prod_{i=m+1}^{n} a_{\alpha'(i-m)\sigma(i)}$$

(用(3),(4))

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\pi)\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\pi(i)\sigma(i)} \quad (用(2))$$

$$= \det A. \quad (用(6)) \quad |$$

最后我们用这两个定理来证明一个关于酉矩阵子式的有趣结果[38]。

定理10.3 设 $U \in M_n$ 是酉矩阵（即 $U^*U = I_n$）或实正交矩阵($U^TU = I_n$)。则对任意的 $\alpha, \beta \in Q_{m,n}(1 \leqslant m \leqslant n)$，都有

$$\det U \det \overline{U[\alpha|\beta]} = (-1)^{s(\alpha)+s(\beta)} \det U(\alpha|\beta). \quad (9)$$

特别有酉矩阵的子式与它的余子式按模相等，即

$$|\det U[\alpha|\beta]| = |\det U(\alpha|\beta)|. \quad (10)$$

证 因为 $\det I_n[\beta|\omega] = \delta_{\beta\omega}$，$U^*[\beta|\gamma] = \overline{U[\gamma|\beta]^T}$，把 Cauchy-Binet 定理用于 $I_n = U^*U$ 就得

$$\delta_{\beta\omega} = \sum_{\gamma \in Q_{m,n}} \det \overline{U[\gamma|\beta]} \det U[\gamma|\omega]. \quad (11)$$

又由一般的 Laplace 展开定理（练习10.3）有

$$\delta_{\alpha\gamma} \det U = \sum_{\omega \in Q_{m,n}} \det U[\gamma|\omega](-1)^{s(\alpha)+s(\omega)} \det U(\alpha|\omega).$$

在此式两边乘以 $\det \overline{U[\gamma|\beta]}$ 并对 γ 求和，左边就等于

$$\sum_{\gamma \in Q_{m,n}} \delta_{\alpha\gamma} \det U \det \overline{U[\gamma|\beta]} = \det U \det \overline{U[\alpha|\beta]}.$$

而右边用(11)式就成为

$$\sum_{\gamma\in Q_{m,n}}\sum_{\omega\in Q_{m,n}}\det\overline{U[\gamma|\beta]}\det U[\gamma|\omega]$$

$$\cdot(-1)^{s(\alpha)+s(\omega)}\det U(\alpha|\omega)$$

$$=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}\delta_{\beta\omega}(-1)^{s(\alpha)+s(\omega)}\det U(\alpha|\omega)$$

$$=(-1)^{s(\alpha)+s(\beta)}\det U(\alpha|\beta).$$

故(9)式表明. 注意到$|\det U|=1$，即得(10)式. |

(本节所用符号可看[16]和[12])

练 习 10

1. 证明本节公式(3)和(4)，用(5)式直接证明$\det(AB)=\det A\det B$。

2. 证明公式$\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{\gamma\in\Gamma_{m,n}}\prod_{i=1}^{m}a_{i\gamma(i)}$。

3. 证明更一般的Laplace展开定理：设$A\in M_n$，α，$\beta\in Q_{m,n}$，$(1\leqslant m\leqslant n)$，则

$$\delta_{\alpha\beta}\det A=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}\det A[\alpha|\omega](-1)^{s(\beta)+s(\omega)}\det A(\beta|\omega).$$

4. 若S是一个集合，用$|S|$表示集合S的元素个数，证明

$$|\Gamma(n_1,\cdots,n_m)|=\prod_{i=1}^{m}n_i|,\Gamma_{m,n}|=n^m,|G_{m,n}|=\binom{n+m-1}{m},$$

$$|D_{m,n}|=\binom{n}{m}m!,\quad|Q_{m,n}|=\binom{n}{m},\quad|S_n|=n!$$

第二章　多重线性映射，张量空间

这一章叙述多重线性代数的基础概念，由多重线性映射引入张量与张量空间。为使初学者便于掌握，我们采用多重线性代数与线性代数对比的方法来阐述各个概念。进行这种对比主要是借助于序列集合的记号[12]。事实上从记号上来说好些情况下相当于把线性代数中从1到n的求和问题$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$推广到对一个序列集合$\Gamma$的求和问题$\left(\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma\right)$。读者很快就能看到这一点。

§1　多重线性映射，张映射

设V_1，…，V_m，W是$m+1$个向量空间，一个映射φ：$V_1\times\cdots\times V_m\to W$，如果它对每个向量变量分别是线性的，即

$$\varphi(v_1,\cdots,v_i+av_i',\cdots,v_m)=\varphi(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_m)+a\varphi(v_1,\cdots,v_i',\cdots,v_m),1\leqslant i\leqslant m,$$

则称φ为m**重线性映射**或**多重线性映射**。

线性映射可看作是多重线性映射的特殊情形，但大于一重的多重线性映射则与线性映射有很大的区别。下面是线性映射$T:V_1\times V_2\to W$（即$T\in L(V_1\times V_2,W)$）与二重线性

映射 $\varphi: V_1 \times V_2 \to W$ 的一个明显区别.

由 T 是线性的有

$$T(v_1+v_1', v_2+v_2') = T(v_1, v_2) + T(v_1', v_2')$$
$$= T(v_1, 0) + T(0, v_2) + T(v_1', 0) + T(0, v_2')$$

(这是因为卡氏积空间的向量加法为 $(v_1+v_1', v_2+v_2') = (v_1, v_2) + (v_1', v_2')$)

但由 φ 是二重线性的则有

$$\varphi(v_1+v_1', v_2+v_2') = \varphi(v_1, v_2+v_2') + \varphi(v_1', v_2+v_2') = \varphi(v_1, v_2) + \varphi(v_1, v_2') + \varphi(v_1', v_2) + \varphi(v_1', v_2')$$

特别地有 $\varphi(v_1, 0) = \varphi(0, v_2) = 0$.

多重线性映射在线性代数中已遇到过，下面是一些简单例子，它们为多重线性映射是显然的.

(a)使用 $f(x,y)=xy$ 定义映射 $f: \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$，$f$ 是二重线性的.

(b)使用 $\varphi(f, v)=f(v)$定义映射 $\varphi: V^* \times V \to \boldsymbol{C}$，$\varphi$ 是二重线性的.

(c)设 $A\in M_{m,n}$，定义 $\varphi(x,y)=x^{\mathrm{T}}Ay$，则 $\varphi: M_{m,1}\times M_{m,1}\to\boldsymbol{C}$ 是二重线性的.

(d)定义 $\otimes(x,y)=xy^{\mathrm{T}}$，则 $\otimes: M_{m,1}\times M_{n,1}\to M_{m,n}$ 是二重线的性.

(e)设 x_j 组成方阵 A 的第 j 列，定义 $\det(x_1,\cdots,x_n)=\det A$，则 $\det: M_{n,1}\times\cdots\times M_{n,1}\to\boldsymbol{C}$ 是 n 重线性的.

(f)设 $f_i\in V_i^*$，$i=1,\cdots,m$，定义 $f(v_1,\cdots,v_m)=\prod_{i=1}^{m} f_i(v_i)$，则 $f: V_1\times\cdots\times V_m\to\boldsymbol{C}$ 是 m 重线性的，习惯写

成 $f=\prod_{i=1}^{m} f_i$。这里要注意写法：$\left(\prod_{i=1}^{m} f_i\right)(v_1,\cdots,v_m)=f_1(v_1)\cdots f_m(v_m)=\prod_{i=1}^{m} f_i(v_i)$。

（g）设 $v_i\in V_i$，$i=1,\cdots,m$，定义 $g(f_1,\cdots,f_m)=\prod_{i=1}^{m} f_i(v_i)$，则 $g:V_1^*\times\cdots\times V_m^*\to \boldsymbol{C}$ 也是 m 重线性的。

（h）若 $\varphi:\overset{m}{\underset{1}{\times}} V_i\to W$，$\psi$：$\overset{m}{\underset{1}{\times}} V_i\to W$ 都是 m 重线性的，$a\in \boldsymbol{C}$，定义 $(\varphi+a\psi)(v_1,\cdots,v_m)=\varphi(v_1,\cdots,v_m)+a\psi(v_1,\cdots,v_m)$，则 $\varphi+a\psi$ 也是 m 重线性的，于是所有 m 重线性映射的集合构成一向量空间，通常用符号 $M(V_1,\cdots,V_m:W)$ 表示。

回忆第一章提到的序列集合

$$\Gamma=\Gamma(n_1,\cdots,n_m)$$
$$=\{\gamma\mid\gamma=(\gamma(1),\cdots,\gamma(m)),1\leqslant\gamma(i)\leqslant n_i,i=1,\cdots,m\}$$

及 Γ 的序列数为 $|\Gamma|=\prod_{i=1}^{m} n_i$，本章要多次用到这个集合。注意集合 Γ 的元素（序列）可按排字典的办法（由小到大）一个不漏地排起来成为有序集合。利用集合 Γ 可简单地表达关于求和求积号交换的恒等式（类似于第一章练习10.2）

$$\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}=\sum_{\gamma\in\Gamma}\prod_{i=1}^{m} a_{i\gamma(i)}.$$

设 $\dim V_i=n_i$，$\{e_{i1},\cdots,e_{in_i}\}$是 V_i 的基，$i=1,\cdots,m$，则 V_i 中的向量 v_i 可表示为

$$v_i=\sum_{j=1}^{n_i}a_{ij}e_{ij},\quad i=1,\cdots,m. \tag{1}$$

设 $\psi:V_1\times\cdots\times V_m\to W$ 是任一个 m 重线性映射，由定义可写出

$$\begin{aligned}\psi(v_1,\cdots,v_m)&=\psi\left(\sum_{j_1=1}^{n_1}a_{1j_1}e_{1j_1},\cdots,\sum_{j_m=1}^{n_m}a_{mj}e_{mj_m}\right)\\&=\sum_{j_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{j_m=1}^{n_m}a_{1j_1}\cdots a_{mj_m}\psi(e_{1j_1},\cdots,e_{mj_m})\\&=\sum_{\gamma\in\Gamma}a_{1\gamma(1)}\cdots a_{m\gamma(m)}\psi(e_{1\gamma(1)},\cdots,e_{m\gamma(m)})\\&=\sum_{\gamma\in\Gamma}a_\gamma\psi(e_\gamma).\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $a_\gamma=a_{1\gamma(1)}\cdots a_{m\gamma(m)}=\prod_{i=1}^{m}a_{i\gamma(i)}\in\boldsymbol{C},$

$$\gamma\in\Gamma(n_1,\cdots,n_m), \tag{3}$$

$$e_\gamma=(e_{1\gamma(1)},\cdots,e_{m\gamma(m)})\in\mathop{\times}_{1}^{m}V_i,\quad \gamma\in\Gamma(n_1,\cdots,n_m). \tag{4}$$

（2）式是一般多重线性映射的重要表示式，这里要注意缩写符号 a_γ 和 e_γ 的不同含义。

下面是表明多重线性映射特性的一个重要定理。

定理1.1 （**多重线性扩张**）设 $\{e_{i1},\cdots,e_{in}\}$ 是 V_i 的基，$i=1,\cdots,m$，则存在唯一的 m 重线性映射 $\varphi:V_1\times\cdots\times V_m\to W$，使 φ 在点 e_γ 上取给定的值 w_γ，$\gamma\in\Gamma(n_1,\cdots,n_m)$，其中 e_γ 由（4）式定义，w_γ 是 W 的面量。

证 因为要求$\varphi(e_\gamma)=w_\gamma$，$\gamma\in\Gamma$，由(2)可以看到(对比第一章定理1.2)，我们应定义

$$\varphi(v_1,\cdots,v_m)=\sum_{\gamma\in\Gamma}a_\gamma w_\gamma,$$

其中a_γ由(1)，(3)确定，下面证明这个映射φ即为所求。

除了(1)之外再设$v_i'=\sum_{j=1}^{n_i}a_{ij}'e_{ij}$，$i=1,\cdots,m$，由$\varphi$的定义有

$$\begin{aligned}
&\varphi(v_1,\cdots,v_i+cv_i',\cdots,v_{m})\\
&=\sum_{\gamma\in\Gamma}a_{1\gamma(1)}\cdots(a_{i\gamma(i)}+ca_{i\gamma(i)}')\cdots a_{m\gamma(m)}w_\gamma\\
&=\sum_{\gamma\in\Gamma}a_{1\gamma(1)}\cdots a_{i\gamma(i)}\cdots a_{m\gamma(m)}w_\gamma\\
&\quad+c\sum_{\gamma\in\Gamma}a_{1\gamma(1)}\cdots a_{i\gamma(i)}'\cdots a_{m\gamma(m)}w_\gamma\\
&=\varphi(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_m)+c\varphi(v_1,\cdots,v_i',\cdots,v_m),\\
&\qquad i=1,\cdots,m,
\end{aligned}$$

故φ是m重线性的。

又对任意$\alpha\in\Gamma$，由$e_{i\alpha(i)}=\sum_{j=1}^{n_i}\delta_{\alpha(i)j}e_{ij}$及$\varphi$的定义有

$$\begin{aligned}
\varphi(e_\alpha)&=\varphi(e_{1\alpha(1)},\cdots,e_{m\alpha(m)})\\
&=\sum_{\gamma\in\Gamma}\delta_{\alpha(1)\gamma(1)}\cdots\delta_{\alpha(m)\gamma(m)}w_\gamma\\
&=\sum_{\gamma\in\Gamma}\delta_{\alpha\gamma}w_\gamma
\end{aligned}$$

$$= w_a.$$

这就证明了在 $e_\gamma\ (\gamma\in\Gamma)$ 上取给定值的多重线性映射是存在的。假定还有多重线性映射 $\psi: V_1\times\cdots\times V_m\to W$ 也满足 $\psi(e_\gamma)=w_\gamma,\ \gamma\in\Gamma$，那么由(2)即得

$$\psi(v_1,\cdots,v_m)=\sum_{\gamma\in\Gamma}a_\gamma\psi(e_\gamma)$$

$$=\sum_{\gamma\in\Gamma}a_\gamma w_\gamma=\varphi(v_1,\cdots,v_m)$$

故 $\psi=\varphi$，唯一性被证明。 |

现在我们再来看线性映射与多重线性映射的重要区别。回忆要确定线性映射 $T: V\to W$ 时，给定值的点的数目等于 V 的维数，但确定多重线性映射 $\varphi: \overset{m}{\underset{1}{\times}}V_i\to W$ 时，给定值的点的数目为 $|\Gamma|=\prod_{i=1}^{m}\dim V_i$，一般它比空间 $\overset{m}{\underset{1}{\times}}V_i$ 的维数 $\left(\sum_{i=1}^{m}\dim V_i\right)$ 多得多。

我们又知道线性映射 T 的值域 $\operatorname{Im}T$ 是一个子空间，但多重线性映射 φ 的值域 $\operatorname{Im}\varphi=\{\varphi(v_1,\cdots,v_m)\mid v_i\in V_i, i=1,\cdots,m\}$ 不一定是子空间，这是两种映射一个不太明显而又很重要的区别。下面是说明这个问题的简单例子。

看到(d)中当 $m=n=2$ 的情形，即使用 $\otimes(x,y)=xy^{\mathrm T}$ 来定义 $\otimes: M_{21}\times M_{21}\to M_2$。因为 $\rho(xy^{\mathrm T})\leqslant\min\{\rho(x),\rho(y^{\mathrm T})\}\leqslant 1$，故 $\det(\otimes(x,y))=0$，但若令 $x_1=(1,0)^{\mathrm T}$，$x_2=(0,1)^{\mathrm T}$，则 $\det(\otimes(x_1,x_1)+\otimes(x_2,x_2))=\det I_2=1$，因此 $\otimes(x_1,x_1)+\otimes(x_2,x_2)\notin\operatorname{Im}\otimes$，这说明 $\operatorname{Im}\otimes$ 不是子

空间。

多重线性映射 $\varphi: V_1 \times \cdots \times V_m \to W$ 的值域 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 所生成的 W 的子空间记作 $\langle \mathrm{Im}\varphi \rangle$。也定义 φ 的秩为 $\rho(\varphi) = \dim\langle \mathrm{Im}\varphi \rangle$，由公式(2)知，$\varphi$ 的值可用 $\prod_{i=1}^{m} \dim V_i \left(= \prod_{i=1}^{m} n_i \right)$ 个 $\varphi(e_\gamma)$ 线性表示，即 $\langle \varphi(e_\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \rangle = \langle \mathrm{Im}\varphi \rangle$，故 $\rho(\varphi) \leqslant \prod_{i=1}^{m} \dim V_i$。

一个多重线性映射 $\otimes: V_1 \times \cdots \times V_m \to P$，如果 $\rho(\otimes) = \prod_{i=1}^{m} \dim V_i$，则称 $\otimes$ 为关于 $V_1, \cdots, V_m$ 的**张映射**。这是本章的重要概念。

用句通俗的话说，张映射是张开到最大维数的一种多重线性映射。

例(a)中的普通乘法就是最平凡的张映射。

定理1.2 多重线性映射 $\varphi: V_1 \times \cdots \times V_m \to P$ 为张映射当且仅当 $\{\varphi(e_\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$ 是线性无关的。其中 e_γ 由(4)定义。

证 这由 $\langle \varphi(e_\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \rangle = \langle \mathrm{Im}\varphi \rangle$ 及 $|\Gamma| = \prod_{i=1}^{m} \dim V_i$ 即得。 ▮

定理1.3 关于 $V_1, \cdots, V_m$ 的张映射总存在。

证 这是明显的，因为由多重线性扩张定理，我们只要取 W 为维数等于 $\prod_{i=1}^{m} \dim V_i$ 的向量空间，给定的向量 w_γ，$\gamma \in \Gamma$ 取为 W 的基，则所唯一确定的多重线性映射 φ 就是

张映射。

张映射是很重要的多重线性映射。下面的定理表明任何其它的多重线性映射都可用一个固定的张映射经过线性映射而得到，这个就是所谓因子化性质，详细说来就是：

一个多重线性映射 $\varphi: V_1\times\cdots\times V_m\to P$ 称为具有**因子化性质**，如果对于任意的多重线性映射 $\psi: V_1\times\cdots\times V_m\to W$（$W$ 也任意），总存在 $T\in L(P,W)$，使得 $\psi=T\varphi$。

这个性质可用一个图来表示：

$$\begin{array}{ccc} V_1\times\cdots\times V_m & \xrightarrow{\varphi} & P \\ & {\scriptstyle\psi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle T} & \\ & W & \end{array}$$

现在就来证明张映射具有这个重要的因子化性质。

定理1.4 设 $\varphi: V_1\times\cdots\times V_m\to P$ 是多重线性映射，则 φ 是张映射的充要条件是 φ 具有因子化性质。

证 假定 φ 是张映射，那么 $\{\varphi(e_\gamma)\mid\gamma\in\Gamma\}$ 是 $\langle\mathrm{Im}\varphi\rangle$ 的基，由线性扩张定理时，存在唯一的 $T_1\in L(\langle\mathrm{Im}\varphi\rangle, W)$ 使 $T_1\varphi(e_\gamma)=\psi(e_\gamma)$，$\gamma\in\Gamma$。因为 $\langle\mathrm{Im}\varphi\rangle\subset P$，故存在 $T\in L(P,W)$ 使 $T|_{\langle\mathrm{Im}\varphi\rangle}=T_1$（第一章练习7.1），于是 $T\varphi(e_\gamma)=\psi(e_\gamma)$，$\gamma\in\Gamma$。又因 $T\varphi$ 与 ψ 都是多重线性映射（练习1.2），再用多重线性扩张的唯一性即得 $T\varphi=\psi$。反之我们取 ψ 为一个张映射，即 $\dim\langle\mathrm{Im}\psi\rangle=\prod_{i=1}^{m}\dim V_i$。因为 $T\varphi=\psi$ 且 T 是线性的，于是就有 $T(\langle\mathrm{Im}\varphi\rangle)=\langle\mathrm{Im}\psi\rangle$，由此得

$$\dim\langle\mathrm{Im}\psi\rangle\leqslant\dim\langle\mathrm{Im}\varphi\rangle,$$

故 $\rho(\varphi)=\prod_{i=1}^{m}\dim V_i$，即 φ 是张映射。 ▎

练 习 1

1. 设 $\varphi: W_1\times\cdots\times W_m\to W$ 是 m 重线性的，$T_i\in L(V_i,W_i)$，$i=1,\cdots,m$，若定义 $\psi(v_1,\cdots,v_m)=\varphi(T_1v_1,\cdots,T_mv_m)$，证明 $\psi: V_1\times\cdots\times V_m\to W$ 也是 m 重线性的.

2. 设 $\varphi: V_1\times\cdots\times V_m\to V$ 是 m 重线性的，$T\in L(V,W)$，证明 $T\varphi: V_1\times\cdots\times V_m\to W$ 也是 m 重线性的.

3. 证明例(e)中当 $n>1$时，det 不是张映射.

4. 假定多重线性映射 $\varphi: V_1\times\cdots\times V_m\to P$ 具有因子化性质，证明其中的线性映射 T 是唯一确定的当且仅当 $\langle \mathrm{Im}\varphi\rangle=P$.

§2 张量空间，唯一因子化性质

与张映射相关联的重要概念是张量和张量空间．张量空间在多重线性代数中所起的作用与向量空间在线性代数中所起的作用相仿．张量空间定义的叙述有多种形式，下面是其中的一种．

设 P 是一个向量空间，如果存在张映射 $\otimes: V_1\times\cdots\times V_m\to P$ 使 $\langle \mathrm{Im}\otimes\rangle=P$，则称 P 为 $V_1,\cdots,V_m$ 带有张映射 $\otimes$ 的**张量空间**或称 P 为 $V_1,\cdots,V_m$ 的**张量积空间**，这时 P 中的向量则称为**张量**.

或者粗略地说，定义了张映射的向量空间称为张量空间.

由定义可以看到，张量空间 P 是由 $V_1,\cdots,V_m$ 及张映射

$\otimes$所决定，故我们写为 $P=V_1\otimes\cdots\otimes V_m=\bigotimes_1^m V_i$。显然张量空间的维数是 $\dim\left(\bigotimes_1^m V_i\right)=\dim\langle \mathrm{Im}\otimes\rangle=\prod_{i=1}^m \dim V_i$。

张量空间中张映射$\otimes$的值$\otimes(v_1,\cdots,v_m)\in P$称为**可合张量**（或**可合元素**）并表示为$\otimes(v_1,\cdots,v_m)=v_1\otimes\cdots\otimes v_m=v^{\otimes}$。$v_1\otimes\cdots\otimes v_m$也称为$v_1,\cdots,v_m$的**张量积**。

值得注意的是：张量空间 $V_1\otimes\cdots\otimes V_m=\langle \mathrm{Im}\otimes\rangle$一般并不等于可合张量的集合$\{v_1\otimes\cdots\otimes v_m|v_i\in V_i\}$即$\mathrm{Im}\otimes$。属于$\langle \mathrm{Im}\otimes\rangle$而不属于$\mathrm{Im}\otimes$的张量则称为**不可合张量**。更要强调的是：因张量空间由$\mathrm{Im}\otimes$生成，故张量空间可以取可合张量作为基，这一点对以后的理论推导特别重要。显然$\{\otimes(e_\gamma)=e_\gamma^{\otimes}|\gamma\in\Gamma\}$就是张量空间$\bigotimes_1^m V_i$的一组基，于是任一张量$z\in\bigotimes_1^m V_i$可表示为$z=\sum_{\gamma\in\Gamma}c_\gamma e_\gamma^{\otimes}$，$\{c_\gamma\in \mathbf{C}|\gamma\in\Gamma\}$称为张量$z$关于基$\{e_\gamma^{\otimes}|\gamma\in\Gamma\}$的张量坐标（和向量坐标表示类似）。

张量空间的存在性问题是明显的，由定理1.3知对于$V_1,\cdots,V_m$的张映射$\otimes$是存在的，因而$\langle \mathrm{Im}\otimes\rangle$就是$V_1,\cdots,V_m$的张量积空间。这里我们把张量空间的存在性问题写成另一种显浅的形式。

定理2.1 设P是一个向量空间，维数是$\prod_{i=1}^m \dim V_i$。则总存在张映射$\otimes$：$\times_1^m V_i\to P$，使P成为$V_1,\cdots,V_m$的张量积空间。 ▌

下面是张量空间的既简单又重要的模型，当我们学习张量空间的性质觉得抽象时可结合此模型来理解.

现在我们来证明当使用 $\otimes(x, y) = xy^{\mathrm{T}}$ 来定义双线性映射 $\otimes: M_{m,1} \times M_{n,1} \to M_{m,n}$ 时（例1(d)，有 $M_{m,n} = M_{m,1} \otimes M_{n,1}$.

令 $x_i = (\delta_{i1}, \cdots, \delta_{im})^{\mathrm{T}}, i = 1, \cdots, m$； $y_j = (\delta_{j1}, \cdots, \delta_{jn})^{\mathrm{T}}$，$j = 1, \cdots, n$，显然它们分别是 $M_{m,1}$ 和 $M_{n,1}$ 的自然基，由上面定义有 $\otimes(x_i, y_j) = (\delta_{ij}) = E_{ij}$（$M_{m,n}$ 中 (i, j) 位置上元素为 1 其余元素为 0 的矩阵）. 因为 $\{E_{ik} | 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ 是 $M_{m,n}$ 的自然基，故 $M_{m,n} = \langle \mathrm{Im} \otimes \rangle$. 又由 $\dim M_{m,n} = mn = \dim M_{m,1} \cdot \dim M_{n,1}$，故 $\otimes$ 是张映射，因而 $M_{m,n} = M_{m,1} \otimes M_{n,1}$.

完全类似，我们也可以使用 $\boxtimes(x, y) = yx^{\mathrm{T}}$ 来定义双线性映射 $\boxtimes: M_{m,1} \times M_{n,1} \to M_{n,m}$，使得 $M_{n,m} = M_{m,1} \boxtimes M_{n,1}$.

显然上面的 $M_{m,1} \otimes M_{n,1}$ 与 $M_{m,1} \boxtimes M_{n,1}$ 是不同的张量积空间，这就是说关于 $V_1, \cdots, V_m$ 的张量积空间可以是多种多样的，但另一方面，在下面的同构意义下又是唯一的.

定理2.2 若 $P = V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$，$Q = V_1 \boxtimes \cdots \boxtimes V_m$ 是 $V_1, \cdots, V_m$ 的两个张量积空间，则它们是同构的，即存在可逆映射 $T \in L(P, Q)$ 使 $T(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = v_1 \boxtimes \cdots \boxtimes v_m$（即 $T\otimes = \boxtimes$）.

证 因 P, Q 都是 $V_1, \cdots, V_m$ 的张量积空间，故 P, Q 的维数相等且 $\{\otimes(e_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$，$\{\boxtimes(e_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ 分别是 P, Q 的基，由线性扩张定理及第一章练习 1.4 可知，存在唯一的可逆映射 $T \in L(P, Q)$ 使 $T\otimes(e_\gamma) = \boxtimes(e_\gamma)$，$\gamma \in \Gamma$. 再由多

重线性扩张的唯一性，即得 $T\otimes=\boxtimes$. ∎

由此知 $V_1,\cdots,V_m$ 的所有张量积空间都是同构的，故我们以后用符号 $V_1\otimes\cdots\otimes V_m$ 表示任意的一个.

下面的有用结论可由张量空间的定义及练习1.4直接得到.

定理2.3 设 $\psi:\times\cdots\times V_m\to W$ 是任一个多重线性映射，则存在唯一的线性映射 $T\in L(\bigotimes_1^m V_i,W)$，使 $\psi=T\otimes$.（即 $\psi(v_1,\cdots v_m,=T\otimes(v_1,\cdots,v_m)=Tv^{\otimes}$）. ∎

此结论也可简单地说成这样：张量空间 $\bigotimes_1^m V_i$ 上的张映射 $\otimes$ 具有**唯一因子化性质**.

再结合练习1.4又可写出一个与定理1.4相平行的结论.

定理2.4 设 $\varphi:V_1\times\cdots\times V_m\to P$ 是多重线性映射，则 φ 是张映射且满足 $\langle\mathrm{Im}\varphi\rangle=P$ 的充要条件是 φ 具有唯一因子化性质. ∎

这样，张量空间的定义就可以写成下面的等价形式：

如果多重线性映射 $\otimes:\times_1^m V_i\to P$ 具有唯一因子化性质，则称 P 为 $V_1,\cdots,V_m$ 的张量积空间.（例如看[6, p.5]）

或者写成这样：如果多重线性映射 $\otimes:\times_1^m V_i\to P$ 具有因子化性质且满足 $\langle\mathrm{Im}\otimes\rangle=P$，则称 P 为 $V_1,\cdots,V_m$ 的张量积空间.（例如看[12, p.14]）

注意，当讨论无限维空间时，这两种定义仍适用，而张映射则应定义为具有因子化性质的多重线性映射.

练　习　2

1. 证明如果某个 $v_i=0$，则 $v_1\otimes\cdots\otimes v_m=0$.

2. 设 $z\in V\otimes U$，由定义，z 可表示为可合张量的和，即

$$z=\sum_{i=1}^{k}v_i\otimes u_i,$$

证明如果 k 是这种表示的最小正整数，则 $\{v_1,\cdots,v_k\}$，$\{u_1,\cdots,u_k\}$ 分别是线性无关的.

3. 设 $e_1,e_1\in V$ 是线性无关的，证明 $V\otimes V$ 中的张量 $e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1$ 不是可合张量.

4. 设 P 是 $V_1,\cdots,V_m$ 带有张映射 φ 的张量空间，又 $T\in L(P,Q)$ 是可逆映射，证明 $\psi=T\varphi$ 也是张映射且 Q 是 $V_1,\cdots,V_m$ 带有张映射 ψ 的张量空间.

§3　张量的一些性质，诱导内积

定理3.1　设 $\varphi:\overset{m}{\underset{1}{\times}}V_i\to W$ 是任一个多重线性映射，若 $v_1\otimes\cdots\otimes v_m+\cdots+u_1\otimes\cdots\otimes u_m=0$，则 $\varphi(v_1,\cdots,v_m)+\cdots+\varphi(u_1,\cdots,u_m)=0$.

证　由张映射 $\otimes$ 的唯一因子化性质，知存在 $T\in L(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i,W)$ 使 $\varphi=T\otimes$，即 $\varphi(v_1,\cdots,v_m)=T\otimes(v_1,\cdots,v_m)=T(v_1\otimes\cdots\otimes v_m)$，同样 $\varphi(u_1,\cdots,u_m)=T(u_1\otimes\cdots\otimes u_m)$，于是 $\varphi(v_1,\cdots,v_m)+\cdots+\varphi(u_1,\cdots,u_m)=T(v_1\otimes\cdots\otimes v_m)+\cdots$

$+T(u_1\otimes\cdots\otimes u_m)=T(v_1\otimes\cdots\otimes v_m+\cdots+u_1\otimes\cdots\otimes u_m)=0$. ▎

定理3.2 $v_1\otimes\cdots\otimes v_m=0$的充要条件是某$v_i=0$。

证 若$v_1\otimes\cdots\otimes v_m=0$但所有$v_i$都不为0，那么由线性扩张定理就存在$f_i\in V_i^*$使$f_i(v_i)=1$，$i=1,\cdots,m$。令$\varphi=\prod_{i=1}^{m}f_i$，就有$\varphi(v_1,\cdots,v_m)=\prod_{i=1}^{m}f_i(v_i)=1$。但$\varphi$是$m$重线性的(例1(f))，故由定理3.1得$\varphi(v_1,\cdots,v_m)=0$。这矛盾说明必有某$v_i$为0。条件的充分性看练习2.1。 ▎

定理3.3 $v_1\otimes\cdots\otimes v_m=u_1\otimes\cdots\otimes u_m\neq0$的充要条件是$v_i=c_iu_i\neq0$，$i=1,\cdots,m$，且$\prod_{i=1}^{m}c_i=1$。

证 条件的充分性是显然的。现证条件的必要性。由定理3.2知所有v_i,u_i都不为0。现对于某个固定的k，若v^k与u_k线性无关，则由线性扩张定理，必存在$f_k\in V_k^*$，使$f_k(v_k)=1$，$f_k(u_k)=0$。另外对$i\neq k$，$i=1,\cdots,m$，取$f_i\in V_i^*$使$f_i(v_i)=1$。令$\varphi=\prod_{i=1}^{m}f_i$，则$\varphi(v_1,\cdots,v_m)=\prod_{i=1}^{m}f_i(v_i)=1$，$\varphi(u_1,\cdots,u_m)=\prod_{i=1}^{m}f_i(u_i)=0$，这与由定理3.1得到的$\varphi(v_1,\cdots,v_m)=\varphi(u_1,\cdots,u_m)$相矛盾，故对任意的$k,v_k$与$u_k$线性相关，因而$v_k=c_ku_k$，$k=1,\cdots,m$。又由$u^\otimes=v^\otimes=\prod_{i=1}^{m}c_iu^\otimes\neq0$，即得$\prod_{i=1}^{m}c_i=1$。 ▎

设$z\in\bigotimes_{1}^{m}V_i$不为0，则$z$可表示为若干个可合张量的和，表示法虽然不是唯一的，但在所有表示中必有包含可合

张量个数最少的，这时可合张量的个数称为 z 的**最小长度**（也称为张量 z 的秩）。

显然当张量 z 的最小长度为1时，z 是可合张量，当最小长度大于1时，z 是不可合张量，于是张量最小长度的研究也为判断张量是否为可合张量提供一种途径。

下面是关于二重张量最小长度的一个结论。

定理3.4 设 $z=\sum_{i=1}^{k} v_i\otimes u_i\in V\otimes U$，则 k 是这种表示的最小正整数当且仅当 $\{v_1,\cdots,v_k\}$，$\{u_1,\cdots,u_k\}$ 分别是线性无关的。

证 必要性是上一节练习2.2．这里证明充分性．假定张量 z 还有另一种表示，$z=\sum_{j=1} x_j\otimes y_j$，我们要证明 $k\leqslant r$．因为 $u_1,\cdots,u_k$ 线性无关，故存在 $g\in U^*$ 使 $g(u_1)=1$，$g(u_2)=\cdots=g(u_k)=0$．设 $f\in V^*$ 是任意的线性函数，则 fg 是双线性映射，现在由

$$\sum_{r=1}^{k} v_i\otimes u_i=\sum_{j=1}^{r} x_j\otimes y_j,$$

应用定理3.1于 $\varphi=fg$，即得

$$\sum_{r=1}^{k} f(v_i)g(u_i)=\sum_{j=1}^{r} f(x_j)g(y_j).$$

于是 $$f(v_1)=\sum_{j=1}^{r} f(x_j)g(y_j)=f\left(\sum_{j=1}^{r} g(y_j)x_j\right).$$

因 f 是任意的，故 $v_1=\sum_{j=1}^{k} g(y_j)x_j$，即 $v_1\in\langle x_1,\cdots,x_r\rangle$．

类似地可证 $v_i \in \langle x_1, \cdots, x_r \rangle$，$i = 1, \cdots, k$. 再由 $v_1, \cdots, v_k$ 是线性无关的即得 $k \leqslant r$. ∎

由此定理立即可以判断练习 2.3 的张量 $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$ 不是可合张量.

下面我们来对张量空间 $\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} V_i$ 定义内积. 假定 V_i 上定义了内积 $(,)_i$ 并且 $E_i = \{e_{i1}, \cdots, e_{in_i}\}$ 是 V_i 的一组规格化正交基，$i = 1, \cdots, m$. 我们已经知道 $\{e_\gamma^{\otimes} = e_{1\gamma(1)} \otimes \cdots \otimes e_{m\gamma(m)} | \gamma \in \Gamma\}$ 是 $\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} V_i$ 的一组基，很自然的，要使我们所定义的内积 $(,)$ 简单且便于应用，应使 $\{e_\gamma^{\otimes} | \gamma \in \Gamma\}$ 也成为张量空间 $\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} V_i$ 上的规格化正交基，即满足 $(e_\alpha^{\otimes}, e_\beta^{\otimes}) = \delta_{\alpha\beta}$. 由第一章 §6 知道满足这条件的内积是存在而且唯一的，它就是：

$$(v, u) = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma \bar{b}_\gamma \tag{1}$$

其中 $\quad v = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma e_\gamma^{\otimes}$，$u = \sum_{\gamma \in \Gamma} b_\gamma e_\gamma^{\otimes} \in \overset{m}{\underset{1}{\otimes}} V_i$，$a_\gamma, b_\gamma \in \mathbf{C}$.

表面看来，(1)式定义的内积似乎依赖于各个规格化正交基的选取，实际不然，下面的定理表明它只与各向量空间所定义的内积 $(,)_i$ 有关.

定理3.5 设 V_i 上定义了内积 $(,)_i$，$\{e_{i1}, \cdots, e_{in_i}\}$ 是 V_i 的规格化正交基，又 $v_i, u_i \in V_i$，$i = 1, \cdots, m$，则(1)式定义的内积满足

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m, u_1 \otimes \cdots \otimes u_m) = \prod_{i=1}^{m} (v_i, u_i)_i \tag{2}$$

证 由$v_i, u_i \in V_i$就有

$$v_i=\sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}e_{ij},\quad u_i=\sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}e_{ij},\ i=1,\cdots,m.$$

注意到$\otimes$是多重线性映射，类似于第1节(2)式有

$$v^{\otimes}=\otimes(v_1,\cdots,v_m)=\sum_{\gamma\in\Gamma}\left(\prod_{i=1}^{m} a_{i\gamma(i)}\right)e_\gamma^{\otimes},$$

$$u^{\otimes}=\sum_{\gamma\in\Gamma}\left(\prod_{i=1}^{m} b_{i\gamma(i)}\right)e_\gamma^{\otimes}.$$

现在用定义(1)即得

$$\begin{aligned}(v^{\otimes},u^{\otimes})&=\sum_{\gamma\in\Gamma}\prod_{i=1}^{m} a_{i\gamma(i)}b_{i\gamma(i)}\\&=\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}b_{ij}\\&=\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}e_{ij},\sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}e_{ij}\right)_i\\&=\prod_{i=1}^{m}(v_i,u_i)_i.\end{aligned}$$

因为可合张量$v^{\otimes}$生成$\bigotimes_1^m V_i$，故(2)式完全决定了(1)式，而且(2)式作为内积的计算显然比(1)式来得简单。

总结上面就可以说：若$(\ ,\ )_i$是V_i的内积，$i=1,\cdots,m$，则$(v^{\otimes},u^{\otimes})=\prod_{i=1}^{m}(v_i,u_i)_i$决定了$\bigotimes_1^m V_i$上的一个内积，且对于$V_i$的任意规格化正交基$\{e_{i1},\cdots,e_{in_i}\}$组成的$\{e_\gamma^{\otimes}\mid\gamma\in$

$\Gamma\}$，都有$(e_\alpha^{\otimes}, e_\beta^{\otimes})=\delta_{\alpha\beta}$，$\forall\alpha,\beta\in\Gamma$.

张量空间$\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i$的这个内积称为各内积空间$V_i$的**诱导内积**，从此以后当我们说到$V_i$是内积空间时，$i=1,\cdots,m$，就自然地认为$\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i$及其子空间也定义了诱导内积；反之当说到$\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i$或其子空间定义了诱导内积时，自然是指相对于$V_i$的某个内积而言.

这一节的最后我们简单地讨论一下不同重数的张量空间之间的一种关系.

设V_i是n_i维向量空间，$i=1,\cdots,m$，又$1\leqslant k<m$，$P=V_1\otimes\cdots\otimes V_j$，$Q=V_{k+1}\otimes\cdots\otimes V_m$，$R=V_1\otimes\cdots\otimes V_m$是三个不同重数的张量积空间（它们的张映射含义是不相同的，但我们用相同的符号$\otimes$表示）. 因为

$$\dim R=\prod_{i=1}^{m}n_i=\prod_{i=1}^{k}n_i\prod_{i=k+1}^{m}n_i=\dim P\cdot\dim Q, \quad (3)$$

故存在二重张映射，暂记作$\boxtimes$，使R成为P与Q的张量积空间，即$R=P\boxtimes Q$，但这种张映射太多，我们的目的是要选取一个张映射使P与Q的元素能方便地联系起来.

定理3.6 存在唯一的二重张映射$\boxtimes:\left(\overset{k}{\underset{1}{\otimes}}V_i\right)\times\left(\overset{m}{\underset{k+1}{\otimes}}V_i\right)\to\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i$，它满足

$$\boxtimes(v_1\otimes\cdots\otimes v_k, v_{k+1}\otimes\cdots\otimes v_m)=v_1\otimes\cdots\otimes v_m,$$
$$v_i\in V_i,\ i=1,\cdots,m, \quad (4)$$

及
$$(V_1\otimes\cdots\otimes V_k)\boxtimes(V_{k+1}\otimes\cdots\otimes V_m)=V_1\otimes\cdots\otimes V_m. \quad (5)$$

证 由维数关系(3)及多重线性扩张定理不难证明满足(4)的张映射$\boxtimes$是存在而且唯一的（详看练习3.4）. 又由$\langle \mathrm{Im}\boxtimes\rangle = \langle v_1\otimes\cdots\otimes v_m \mid v_i\in V_i\rangle = \bigotimes_1^m V_i$，故(5)式成立. ▎

上述定理中唯一的张映射$\boxtimes$通常也写为$\otimes$而不会混淆. 于是在定理3.6的意义下，(5)可写为

$$(V_1\otimes\cdots\otimes V_k)\otimes(V_{k+1}\otimes\cdots\otimes V_m) = V_1\otimes\cdots\otimes V_m,$$

而(4)就成为$(v_1\otimes\cdots\otimes v_k)\otimes(v_{k+1}\otimes\cdots\otimes v_m) = v_1\otimes\cdots\otimes v_m$.

定理3.6是进一步建立张量代数理论的基础.

练 习 3

1. 在$V\otimes U$中，假定$u_1,\cdots,u_k$是U中线性无关的向量，$v_1,\cdots,v_k\in V$，证明$\sum_{i=1}^k v_i\otimes u_i = 0$的充要条件是$v_1=\cdots=v_k=0$.

2. 设$v_1,\cdots,v_k\in V$，$A\in M_k$，假定$AA^{\mathrm{T}}=I_k$，$u_j=\sum_{i=1}^k a_{ij}v_i$，$j=1,\cdots,k$，证明$\sum_{i=1}^k v_i\otimes v_i = \sum_{i=1}^k u_i\otimes u_i$.

3. 设在$M_{k,1}\otimes M_{n,1}=M_{k,n}$中的张映射$\otimes$定义为$x\otimes y = xy^{\mathrm{T}}$，又$M_{k,1}$，$M_{n,1}$分别定义了自然内积，证明对于$A$，$B\in M_{k,1}\otimes M_{n,1}$其诱导内积恰是$M_{k,n}$的自然内积(第一章练习3.6)，即$(A,B)=\mathrm{tr}(B^*A)$.

4. 设$\{e_{i1},\cdots,e_{in_i}\}$是$V_i$的基，$i=1,\cdots,m$. 对于

$1 \leqslant k < m$；定义 $\varphi:(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k) \times (V_{k+1} \otimes \cdots \otimes V_m) \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$，使用 $\varphi(e_{1i_1} \otimes \cdots \otimes e_{ki_k},\ e_{(k+1)i_{k+1}} \otimes \cdots \otimes e_{mi_m}) = e_{1i_1} \otimes \cdots \otimes e_{mi_m}$ 并双线性扩张．证明唯一确定的二重线性映射 φ 是张映射且满足

$$\varphi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k,\ v_{k+1} \otimes \cdots \otimes v_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_m,$$
$$v_i \in V_i,\ i=1,\cdots,m.$$

5．设 $z = \sum_{i=1}^{k} v_i \otimes u_i \otimes w_i \in V \otimes U \otimes W$，证明若 $\{v_1,\cdots,v_k\}$，$\{u_1,\cdots,u_k\}$ 分别线性无关且 $w_i \neq 0$，$i=1,\cdots,k$，则 z 的最小长度是 k．

§4 张量空间之间的诱导线性映射

设 V_i，W_i 是向量空间，$i=1,\cdots,m$．$\bigotimes_1^m V_i$，$\bigotimes_1^m W_i$ 分别是它们的张量积空间．从本节开始我们要研究 $\bigotimes_1^m V_i$ 到 $\bigotimes_1^m W_i$ 的线性映射，即 $L(\bigotimes_1^m V_i,\ \bigotimes_1^m W_i)$．

我们从向量空间 V_i 到 W_i 的线性映射出发．假定 $T_i \in L(V_i, W_i)$，$i=1,\cdots,m$，我们定义映射

$$\varphi(v_1,\cdots,v_m) = T_1v_1 \otimes \cdots \otimes T_mv_m \quad (= \otimes(T_1v_1,\cdots,T_mv_m)),$$

由练习 1.1 知 φ：$\times_1^m V_i \to \bigotimes_1^m W_i$ 是 m 重线性的．

利用 $\bigotimes_1^m V_i$ 的张映射 $\otimes$ 的唯一因子化性质，知存在唯一的 $T \in L(\bigotimes_1^m V_i,\ \bigotimes_1^m W_i)$ 使 $T\otimes = \varphi$，即

$$T(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = T_1v_1 \otimes \cdots \otimes T_mv_m.$$

这个线性映射 T 称为 $T_1, \cdots, T_m$ 的诱导线性映射并且记为

$$T = T_1 \otimes \cdots \otimes T_m = \bigotimes_1^m T_i.$$

于是我们可以写

$$(T_1 \otimes \cdots \otimes T_m)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = T_1 v_1 \otimes \cdots \otimes T_m v_m.$$

下面我们先来讨论一下诱导线性映射的一些简单性质.

定理4.1 设 $S_i \in L(W_i, U_i)$，$T_i \in L(V_i, W_i)$，$i=1, \cdots, m$，则 $\left(\bigotimes_1^m S_i\right)\left(\bigotimes_1^m T_i\right) = \bigotimes_1^m S_i T_i$.

证 设 $v_i \in V_i$，$i=1,\cdots,m$，由定义得

$$\begin{aligned}
&\left(\bigotimes_1^m S_i\right)\left(\bigotimes_1^m T_i\right)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) \\
&= \left(\bigotimes_1^m S_i\right)(T_1 v_1 \otimes \cdots \otimes T_m v_m) \\
&= S_1 T_1 v_1 \otimes \cdots \otimes S_m T_m v_m \\
&= \left(\bigotimes_1^m S_i T_i\right)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m).
\end{aligned}$$

因$v_1 \otimes \cdots \otimes v_m$生成$\bigotimes_1^m V_i$，故$\left(\bigotimes_1^m S_i\right)\left(\bigotimes_1^m T_i\right) = \bigotimes_1^m S_i T_i$. ▮

定理4.2 设 $T_i \in L(V_i, W_i)$，$i=1,\cdots,m$，那么

$$\rho\left(\bigotimes_1^m T_i\right) = \prod_{i=1}^m \rho(T_i).$$

证 设 $\rho(T_i) = k_i$，由第一章定理1.3知V_i中存在基$\{e_{i1}, \cdots, e_{ik_i}, e_{ik_i+1}, \cdots, e_{in_i}\}$ 使得 $T_i e_{i1}, \cdots, T_i e_{ik_i}$ 线性无关，而当 $j > k_i$ 时，$T_i e_{ij} = 0$，$i=1, \cdots, m$. 因为 $\{e_\gamma^\otimes \mid \gamma \in \Gamma(n_1, \cdots, n_m)\}$ 是$\bigotimes_1^m V_i$的基且

$$\left(\bigotimes_1^m T_i\right) e_\gamma^\otimes = T_1 e_{1\gamma(1)} \otimes \cdots \otimes T_m e_{m\gamma(m)},$$

故若 γ 的分量中有某个 $\gamma(t)>k_t$，即 $\gamma\notin\Gamma(k_1,\cdots,k_m)$，则 $\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}T_i\right)e_\gamma^\otimes=0$. 而由 $T_ie_{i1},\cdots,T_ie_{ik_i}$ 线性无关，知道 $\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}T_i\right)e_\gamma^\otimes$，$\gamma\in\Gamma(k_1,\cdots,k_m)$，组成张量空间 $\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}W_i$ 的基的一部分，因而是线性无关的. 再用第一章定理1.3，即得

$$\rho\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}T_i\right)=|\Gamma(k_1,\cdots,k_m)|$$

$$=\prod_{i=1}^m k_i=\prod_{i=1}^m\rho(T_i). \qquad ▌$$

定理4.3 设 $T_i\in L(V_i,W_i)$，V_i，W_i 都是内积空间，$i=1,\cdots,m$，并在 $\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i$，$\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}W_i$ 上分别定义了诱导内积，则

$$\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}T_i\right)^*=\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}T_i^*.$$

证 我们用同一符号(,)表示各个内积. 设 $v^\otimes\in\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i$，$w^\otimes\in\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}W_i$ 是任意的可合元素，利用诱导内积性质就有

$$\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}T_iv^\otimes,w^\otimes\right)=(T_1v_1\otimes\cdots\otimes T_mv_m,w_1\otimes\cdots\otimes w_m)$$

$$=\prod_{i=1}^m(T_iv_i,w_i)$$

$$=\prod_{i=1}^m(v_i,T_i^*w_i)$$

$$=(v_1\otimes\cdots\otimes v_m,T_1^*w_1\otimes\cdots\otimes T_m^*w_m)$$

$$=\left(v^\otimes,\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}T_i^*w^\otimes\right).$$

注意到可合元素生成张量空间及共轭映射定义即得

$$\bigotimes_1^m T_i^* = \left(\bigotimes_1^m T_i\right)^*.$$ ▌

练 习 4

1. 证明 $T_1\otimes\cdots\otimes T_m=0$ 的充要条件是某个$T_i=0$.

2. 设 $T_i,S_i\in L(V_i,W_i),i=1,\cdots,m$, 证明 $T_1\otimes\cdots\otimes T_m=S_1\otimes\cdots\otimes S_m\neq 0$ 的充要条件是 $T_i=c_iS_i\neq 0,i=1,\cdots,m$, 且 $\prod_{i=1}^m c_i=1$.

3. 若 $T_i\in L(V_i,V_i),i=1,\cdots,m$. 证明 $\bigotimes_1^m T_i$是可逆的当且仅当每个 T_i 是可逆的. 且在可逆的情况下有

$$\left(\bigotimes_1^m T_i\right)^{-1}=\bigotimes_1^m T_i^{-1}.$$

4. 设 $T_i\in L(V_i,W_i),\ i=1,\cdots,m$, 定义 $\varphi:L(V_1,W_1)\times\cdots\times L(V_m,W_m)\to L\left(\bigotimes_1^m V_i,\bigotimes_1^m W_i\right)$, 使用 $\varphi(T_1,\cdots,T_m)=T_1\otimes\cdots\otimes T_m$ (右边表示 $T_1,\cdots,T_m$ 的诱导线性映射), 证明 φ 是多重线性的.

§5 诱导线性映射的矩阵表示与矩阵的Kronecker乘积

设 $E_i=\{e_{i1},\cdots,e_{in_i}\}$, $F_i=\{f_{i1},\cdots,f_{ik_i}\}$ 分别是V_i和W_i 的有序基, $i=1,\cdots,m$. 令 $E_\otimes=\{e_\beta^\otimes\mid\beta\in\Gamma(n_1,\cdots,n_m)\}$, $F_\otimes=\{f_\alpha^\otimes\mid\alpha\in\Gamma(k_1,\cdots,k_m)\}$, 我们知道 $E_\otimes,F_\otimes$ 分

别是张量空间$\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i$和$\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}W_i$的有序基（规定按字典次序排列），在这些规定之下我们来看诱导线性映射的矩阵表示.

定理5.1 设 $T_i\in L(V_i,W_i)$ 且 $[T_i]_{E_i}^{F_i}=A_i=(a_{st}^i)\in M_{k_i,n_i}$，即 $T_ie_{it}=\sum_{s=1}^{k_i}a_{st}^if_{is}$，$t=1,\cdots,n_i$，$i=1,\cdots,m$.那么$\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}T_i$ 关于有序基 $E_\otimes$，$F_\otimes$ 的矩阵表示是

$$[T_1\otimes\cdots\otimes T_m]_{E_\otimes}^{F_\otimes}=\left(\prod_{i=1}^m a_{\alpha(i)\beta(i)}^i\right)_{\substack{\alpha\in\Gamma(k_1,\cdots,k_m)\\ \beta\in\Gamma(n_1,\cdots,n_m)}}. \tag{1}$$

也就是说$\prod_{i=1}^m k_i\times\prod_{i=1}^m n_i$ 阶的矩阵$\left[\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}T_i\right]_{E_\otimes}^{F_\otimes}$的$(\alpha,\beta)$位置上的元素是$\prod_{i=1}^m a_{\alpha(i)\beta(i)}^i$.

证 对于 $\beta\in\Gamma(n_1,\cdots,n_m)$，我们有

$$\begin{aligned}\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}T_ie_\beta^\otimes&=T_1e_{1\beta(1)}\otimes\cdots\otimes T_me_{m\beta(m)}\\&=\left(\sum_{s=1}^{k_1}a_{s\beta(1)}^1f_{1s}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\sum_{s=1}^{k_m}a_{s\beta(m)}^mf_{ms}\right)\\&=\sum_{\alpha\in\Gamma(k_1,\cdots,k_m)}a_{\alpha(1)\beta(1)}^1f_{1\alpha(1)}\otimes\cdots\otimes a_{\alpha(m)\beta(m)}^mf_{m\alpha(m)}\\&=\sum_{\alpha\in\Gamma(k_1,\cdots,k_m)}\left(\prod_{i=1}^m a_{\alpha(i)\beta(i)}^i\right)f_\alpha^\otimes.\end{aligned}$$

由矩阵表示的定义即得（1）式. ∎

现在我们从另一个角度来看（1）式右端的大矩阵. 这个重要的大矩阵可以单独看作是由 $A_1, \cdots, A_m$ 确定的，这个大矩阵称为 $A_1, \cdots, A_m$ **的 Kronecker 乘积**，也用符号 $A_1 \otimes \cdots \otimes A_m$ 表示. （又称为 $A_1, \cdots, A_m$ 的直积或张量积）

重复一遍这个定义就是：对于 $A_i = (a^i_{s,t}) \in M_{k_i, n_i}$，$i = 1, \cdots, m$，那么 $A_1, \cdots, A_m$ 的 Kronecker 乘积 $A_1 \otimes \cdots \otimes A_m$ 是一个 $\prod_{i=1}^{m} k_i$ 行 $\prod_{i=1}^{m} n_i$ 列的大矩阵，它的(α, β)位置上的元素是 $\left(\bigotimes_{1}^{m} A_i\right)_{\alpha, \beta} = \prod_{i=1}^{m} a^i_{\alpha(i)\beta(i)}$. 其中 $\alpha \in \Gamma(k_1, \cdots, k_m)$，$\beta \in \Gamma(n_1, \cdots, n_m)$ 都是按字典次序排列.

由此定义及定理 5.1 我们立即得到诱导线性映射与矩阵的 Kronecker 乘积的密切关系.

定理5.2 若 $[T_i]^{F_i}_{E_i} = A_i$，$i = 1, \cdots, m$，$E_\otimes$，$F_\otimes$ 如前面所定义，则 $[T_1 \otimes \cdots \otimes T_m]^{E_\otimes}_{F_\otimes} = A_1 \otimes \cdots \otimes A_m = [T_1]^{F_1}_{E_1} \otimes \cdots \otimes [T_m]^{F_m}_{E_m}$. ▎

利用此定理很容易把关于诱导线性映射的结论搬到矩阵的 Kronecker 乘积上来，这些留作练习.

下面我们看一下两个矩阵的 Kronecker 乘积的例子.

假定 $A \in M_{m,n}$，$B \in M_{p,q}$，我们来证明 $A \otimes B$ 可写成如下的分块矩阵，即

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}a_{11}B\cdots a_{1n}B\\ \vdots \quad\quad \vdots\\ a_{m1}B\cdots a_{mn}B\end{pmatrix}=(a_{ij}B)\in M_{mp,nq}.$$

注意到按字典次序排列，就有

$$\Gamma(m,p)=\{(1,1),\cdots,(1,p),(2,1),\cdots,(2,p),\\ \cdots,(m,1),\cdots,(m,p)\},$$

$$\Gamma(n,q)=\{(1,1),\cdots,(1,q),(2,1),\cdots,(2,q),\\ \cdots,(n,1),\cdots,(n,q)\}.$$

我们先看 $A\otimes B$ 的前面 p 行与前面 q 列的某元素，例如取 $\alpha=(1,i)\in\Gamma(m,p)$，$\beta=(1,j)\in\Gamma(n,q)$. 那么按 Kronecker 乘积定义就有

$$(A\otimes B)_{(1,i),(1,j)}=a_{\alpha(1)\beta(1)}b_{\alpha(2)\beta(2)}=a_{11}b_{ij}.$$

这式说明了 $(A\otimes B)$ 的前面 p 行和 q 列的矩阵块是 $a_{11}B$. 其它块可类似证明.

注意：$A\otimes B$ 并不能分块为 (Ab_{ij})，这是由于定义中要求按字典次序排列之故. 故一般 $A\otimes B$ 不等于 $B\otimes A$.

练 习 5

1. 设 $A_i,B_i\in M_{k_i,n_i}$，$i=1,\cdots,m$，证明 Kronecker 乘积的下列性质.

(i) $\bigotimes_1^m A_i=0\Leftrightarrow$ 某个 $A_i=0$.

(ii) $\bigotimes_1^m A_i=\bigotimes_1^m B_i\neq0\Leftrightarrow A_i=c_iB_i\neq0$，$i=1,\cdots,m$，且 $\prod_{i=1}^m c_i=1$.

(iii) $\rho\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} A_i\right)=\prod_{i=1}^{m} \rho(A_i)$.

(iv) $\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} A_i\right)^*=\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} A_i^*$.

2. 设 $A_i\in M_{k_i,l_i}$, $B_i\in M_{l_i,n_i}$, $i=1,\cdots,m$, 直接从 Kronecker 乘积的定义证明 $\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} A_i\right)\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} B_i\right)=\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} A_iB_i$.

$$\left(\text{提示：利用} \sum_{\gamma\in\Gamma(l_1,\cdots,l_m)}\left(\prod_{i=1}^{m} a^i_{\alpha(i)\gamma(i)}\right)\left(\prod_{i=1}^{m} b^i_{\gamma(i)\beta(i)}\right)\right.$$

$$\left.=\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{l_i} a^i_{\alpha(i)j} b^i_{j\beta(i)}\right)\right)$$

3. 若 A_i 是方阵，$i=1,\cdots,m$, 且 $A_1\otimes\cdots\otimes A_m\neq 0$ 是对角线矩阵，证明每个 A_i 都是对角线矩阵.

4. 若 A_i, B_i 是相似的方阵，$i=1,\cdots,m$, 证明 $\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} A_i$ 与 $\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} B_i$ 也相似.

5. 设 $A\in M_m$, $B\in M_n$, 证明 $A\otimes B$ 与 $B\otimes A$ 为相似方阵。

6. 对于 $x\in M_{m,1}$, $y\in M_{n,1}$, 在 §2 末定义过 x 与 y 的两种张量积：$x\otimes y=xy^{\mathrm{T}}$ 及 $x\boxtimes y=yx^{\mathrm{T}}$, 分别检查它们是否为本节定义的 x 与 y 的 Kronecker 乘积.

§6 诱导线性算子

这一节讨论算子 $T_i\in L(V_i,V_i)$ (V_i 为 n_i 维酉空间) 的诱导线性算子 $\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} T_i$, 讨论它的特征值、迹、行列式以及它

的规范性正定性等问题，特别是要弄清这些量与原算子T_i的相应量的关系．讨论这些内容有两种方法：一是先讨论算子然后类推到矩阵（这时是方阵）表示上去；一是先讨论矩阵然后倒推到算子上来．这里我们采用前者，而且由于矩阵的相应结论十分类似（方阵本身也是一种算子），故不再一一列举．

定理6.1 设 $T_i\in L(V_i, V_i)$，如果 V_i 的有序基 $E_i=\{e_{i1},\cdots, e_{in_i}\}$ 使 $[T_i]_{E_i}^{E_i}$ 成为上三角矩阵，$i=1,\cdots,m$. 那么令 $E_\otimes=\{e_\gamma^\otimes|\gamma\in\Gamma(n_1, \cdots, n_m)\}$ 并按字典次序排列，则 $\left[\bigotimes_1^m T_i\right]_{E_\otimes}^{E_\otimes}$ 也是上三角矩阵．

证 因为 $[T_i]_{E_i}^{E_i}$ 是上三角矩阵，故对任意的 $\gamma\in\Gamma(n_1,\cdots,n_m)$ 有

$$T_ie_{i\gamma(i)}=\lambda_{i\gamma(i)}e_{i\gamma(i)}+v_i,$$

其中 $v_i\in\langle e_{ij}|j<\gamma(i)\rangle$，$\lambda_{i\gamma(i)}$ 是对角线元素即 T_i 的特征值，$i=1,\cdots,m$，于是

$$\begin{aligned}\left(\bigotimes_1^m T_i\right)e_\gamma^\otimes&=T_1e_{1\gamma(1)}\otimes\cdots\otimes T_me_{m\gamma(m)}\\&=(\lambda_{1\gamma(1)}e_{1\gamma(1)}+v_1)\otimes\cdots\otimes(\lambda_{m\gamma(m)}\\&\quad\cdot e_{m\gamma(m)}+v_m)\\&=\prod_{i=1}^m\lambda_{i\gamma(i)}e_\gamma^\otimes+w,\end{aligned}\qquad(1)$$

其中 w 是形如 $u^\otimes=u_1\otimes\cdots\otimes u_m$ 的线性组合，而 u_i 或者是 $e_{i\gamma(i)}$ 或者是 v_i 且至少有一个是后者．但 v_i 又是一些 e_{ij} $(j<\gamma(i))$的线性组合．故$u^\otimes$ 进而 w 是一些 $e_\alpha^\otimes$的线性组合且 α 按字典次序排列在γ之前．这就证明了$\left[\bigotimes_1^m T_i\right]_{E_\otimes}^{E_\otimes}$是上三

角矩阵. ∎

定理6.2 设 $T_i \in L(V_i, V_i)$ 的全部特征值为 λ_{ij}, $j=1, \cdots, n_i$, $n_i=\dim V_i$, $i=1, \cdots, m$. 则 $\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} T_i$ 的全部特征值为 $\prod_{i=1}^{m} \lambda_{i\gamma(i)}$, $\gamma \in \Gamma = \Gamma(n_1, \cdots, n_m)$.

证 由第一章定理 5.2 知存在基 E_i 使 $[T_i]_{E_i}^{E_i}$ 是上三角矩阵. 又上三角矩阵的对角线元素为其全部特征值, 故定理的结论由 (1) 式表明. ∎

定理6.3 设 $T_i \in L(V_i, V_i)$, $\dim V_i = n_i$, $i=1, \cdots, m$, $n=\prod_{i=1}^{m} n_i$, 则

$$\operatorname{tr}\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} T_i\right)=\prod_{i=1}^{m} \operatorname{tr}(T_i),$$

$$\det\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} T_i\right)=\prod_{i=1}^{m} (\det T_i)^{n/n_i}.$$

证 因为算子的迹为其全部特征值之和, 算子的行列式为其全部特征值之积, 故应用定理6.2即得

$$\operatorname{tr}\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} T_i\right)=\sum_{\gamma\in\Gamma} \prod_{i=1}^{m} \lambda_{i\gamma(i)} = \prod_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij}$$

$$=\prod_{i=1}^{m} \operatorname{tr}(T_i).$$

$$\det\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} T_i\right)=\prod_{\gamma\in\Gamma} \prod_{i=1}^{m} \lambda_{i\gamma(i)} = \prod_{i=1}^{m} \prod_{\gamma\in\Gamma} \lambda_{i\gamma(i)}.$$

因为 γ 的第 i 个分量 $\gamma(i)$ 只取 n_i 个不同的值, 而每一个值

在全部 $|\Gamma|(=n)$ 个 γ 中都重复 $|\Gamma|/n_i$ 次，所以

$$\prod_{\gamma\in\Gamma}\lambda_{i\gamma(i)}=\prod_{j=1}^{n_i}\lambda_{ij}^{|\Gamma|/n_i}，于是$$

$$\det\left(\bigotimes_1^m T_i\right)=\prod_{i=1}^m\left(\prod_{j=1}^{n_i}\lambda_{ij}\right)^{n/n_i}=\prod_{i=1}^m(\det T_i)^{n/n_i} \qquad \blacksquare$$

以下几个定理和练习都假定在 $\bigotimes_1^m V_i$ 上定义了诱导内积.

定理6.4 设 $T_i\in L(V_i,V_i)$，$i=1,\cdots,m$. 若每个 T_i 是 (a)规范的；(b)厄米特的；(c) 正定的；(d) 非负定的；(e)酉的，则诱导线性算子 $\bigotimes_1^m T_i$ 也具有相应性质.

证 (a)因为每个 T_i 是规范的，故存在规格化正交基 $E_i=\{e_{i1},\cdots,e_{in_i}\}$ 使 $[T_i]_{E_i}^{E_i}$ 是对角线矩阵，也就是

$$T_ie_{ij}=\lambda_{ij}e_{ij},\ j=1,\cdots,n_i,\ i=1,\cdots,m.$$

由诱导内积知，$E_\otimes=\{e_\gamma^\otimes|\gamma\in\Gamma(n_1,\cdots,n_m)\}$ 是 $\bigotimes_1^m V_i$ 的规格化正交基，而且显然有

$$\bigotimes_1^m T_ie_\gamma^\otimes=\prod_{i=1}^m\lambda_{i\gamma(i)}e_\gamma^\otimes,\quad \forall\gamma\in\Gamma.$$

故 $\left[\bigotimes_1^m T_i\right]_{E_\otimes}^{E_\otimes}$ 是对角线矩阵，因而 $\bigotimes_1^m T_i$ 是规范的.

从(b)到(e)，注意到它们都是规范的再利用其特征值之间的关系即可证得. $\blacksquare$

现在我们来看这定理的逆命题. 若 $\bigotimes_1^m T_i$ 具有该定理的某种性质，是否每个 T_i 也都具有呢？回答是几乎都具有. 这里我们只证明其中两个，其余非常类似，留作练习.

定理6.5 设 $T_i\in L(V_i,V_i)$, $i=1,\cdots,m$. 若$0\neq\bigotimes_1^m T_i$是规范的，则每个 T_i 都是规范的.

证 由第一章 §5 知总存在规格化正交基$E_i=\{e_{i1},\cdots,e_{in_i}\}$使$[T_i]_{E_i}^{E_i}$是上三角矩阵. 令$E_\otimes=\{e_\gamma^\otimes|\gamma\in\Gamma\}$. 由$E_\otimes$关于诱导内积是规格化正交的及$\bigotimes_1^m T_i\neq 0$ 是规范的，用定理 6.1 得$\left[\bigotimes_1^m T_i\right]_{E_\otimes}^{E_\otimes}$是上三角规范矩阵. 但上三角的规范矩阵必是对角线矩阵，故$\left[\bigotimes_1^m T_i\right]_{E_\otimes}^{E_\otimes}=[T_1]_{E_1}^{E_1}\otimes\cdots\otimes[T_m]_{E_m}^{E_m}\neq 0$ 是对角线矩阵. 再由练习 5.3 即得 $[T_i]_{E_i}^{E_i}$是对角线矩阵，因而每个 T_i 是规范的. ▌

定理6.6 若 $0\neq\bigotimes_1^m T_i$ 是厄米特的，则存在厄米特算子 H_i，使 $T_i=c_iH_i, i=1,\cdots,m$，且 $\prod_{i=1}^m c_i$ 是实数.

证 首先由定理 6.5 知每个 T_i 是规范的. 又因为 $T_i\neq 0$ (练习 4.1), 故存在某 $\alpha\in\Gamma$ 使T_i 的特征值 $\lambda_{i\alpha(i)}\neq 0$, $i=1,\cdots,m$. 现对某固定的k, 因厄米特算子的特征值是实数，故$\bigotimes_1^m T_i$ 的部分特征值 $\left(\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^m \lambda_{i\alpha(i)}\right)\lambda_{kj}$ $(j=1,\cdots,n_k)$是实数.

令 $a_k=\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^m \lambda_{i\alpha(i)}$，则 $a_k\neq 0$，且 $H_k=a_kT_k$ 是特征值为实数的规范算子，因而 H_k 是厄米特的. 对所有k, 都如此做并写 $c_k=a_k^{-1}$，则由$0\neq\bigotimes_1^m T_k=\left(\prod_{k=1}^m c_k\right)\bigotimes_1^m H_k$ (练习 4.4) 及 $\bigotimes_1^m T_k$,

$\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} H_h$ 都是厄米特的，即得 $\prod_{h=1}^{m} c_h$是实数. ∎

练 习 6

1. 若 $0 \neq \overset{m}{\underset{1}{\otimes}} T_i$ 是正定的（非负定的），则每个 $T_i = c_i H_i$，而 H_i 能被选为正定的（非负定的）且 $\prod_{i=1}^{m} c_i > 0$.

2. 如果$\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} T_i$ 是酉的，则每个 $T_i = c_i U_i$，其中 U_i 是酉的且 $\left|\prod_{i=1}^{m} c_i\right| = 1$.

3. 利用公式$\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} T_i\right)^* = \overset{m}{\underset{1}{\otimes}} T_i^*$ 直接证明定理 6.4.

(提示：例如若每个 T_i 是规范的，则可证

$$\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} T_i\right)^*\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} T_i\right) = \left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} T_i\right)\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} T_i\right)^*.)$$

4. 若 $S \geqslant 0$，$T \geqslant 0$，$S - T \geqslant 0$ 时，我们就简写为$S \geqslant T$. 设 S_i，$T_i \in L(V_i, V_i)$，$i = 1, \cdots, m$，证明当每个 $S_i \geqslant 0$，$T_i \geqslant 0$ 时，$\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}(S_i + T_i) \geqslant \overset{m}{\underset{1}{\otimes}} S_i + \overset{m}{\underset{1}{\otimes}} T_i$.

5. 若 $A \in M_n$，其特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，证明 $L = A \otimes I_n - I_n \otimes A$ 的特征值为 $\lambda_i - \lambda_j$，$i, j = 1, \cdots, n$.

6. 设$T_i \in L(V, V)$，$v_i \in V$，$i = 1, \cdots, m$，$m \leqslant \dim V$，证明 $(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} T_i v^{\otimes}, v^{\otimes}) = 0$，$\forall (v_i, v_j) = \delta_{ij} \Leftrightarrow$ 某个$T_i = 0$.

(提示：参看[21])

§7 线性映射的张量积

前面我们讨论了线性映射$T_i\in L(V_i,W_i)$的诱导线性映射$\bigotimes_1^m T_i\in L\left(\bigotimes_1^m V_i,\bigotimes_1^m W_i\right)$的各种性质．是不是$L\left(\bigotimes_1^m V_i,\bigotimes_1^m W_i\right)$的所有线性映射都是诱导线性映射呢？不是的．（看练习7.1）．但我们能证明它们是由诱导线性映射生成的．

定理7.1 $L\left(\bigotimes_1^m V_i,\bigotimes_1^m W_i\right)=\langle\bigotimes_1^m T_i\,|\,T_i\in L(V_i,W_i)\rangle.$

其中$\bigotimes_1^m T_i$是$T_1,\cdots,T_m$的诱导线性映射．

证 设$\{e_{i1},\cdots,e_{in_i}\},\{f_{i1},\cdots,f_{ik_i}\}$分别是$V_i$和$W_i$的基，$i=1,\cdots,m$．令$\Gamma_1=\Gamma(n_1,\cdots,n_m)$，$\Gamma_2=\Gamma(k_1,\cdots,k_m)$．又设$S\in L\left(\bigotimes_1^m V_i,\bigotimes_1^m W_i\right)$是任意的，则对于$\beta\in\Gamma_1$，由$\{f_\alpha^\otimes\,|\,\alpha\in\Gamma_2\}$是$\bigotimes_1^m W_i$的基就有

$$Se_\beta^\otimes=\sum_{\alpha\in\Gamma_2}c_{\alpha\beta}f_\alpha^\otimes.$$

现在定义线性映射$T^i_{jq}\in L(V_i,W_i)$使

$$T^i_{jq}e_{ip}=\delta_{pq}f_{ij},\quad p,q=1,\cdots,n_i,\quad j=1,\cdots,k_i,\quad i=1,\cdots,m.$$

由线性扩张定理，知T^i_{jq}存在．对于$\alpha\in\Gamma_2$，$\gamma\in\Gamma_1$，定义诱导线性映射$T^\otimes_{\alpha\gamma}=T^1_{\alpha(1)\gamma(1)}\otimes\cdots\otimes T^m_{\alpha(m)\gamma(m)}$，则

$$\begin{aligned}T^\otimes_{\alpha\gamma}e^\otimes_\beta&=T^1_{\alpha(1)\gamma(1)}e_{1\beta(1)}\otimes\cdots\otimes T^m_{\alpha(m)\gamma(m)}e_{m\beta(m)}\\&=\delta_{\beta(1)\gamma(1)}f_{1\alpha(1)}\otimes\cdots\otimes\delta_{\beta(m)\gamma(m)}f_{m\alpha(m)}\\&=\delta_{\beta\gamma}f^\otimes_\alpha.\end{aligned}$$

于是 $\sum_{\alpha\in\Gamma_2}\sum_{\gamma\in\Gamma_1}c_{\alpha\gamma}T^{\otimes}_{\alpha\gamma}e^{\otimes}_{\beta}=\sum_{\alpha\in\Gamma_2}\sum_{\gamma\in\Gamma_1}c_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\gamma}f^{\otimes}_{\alpha}=\sum_{\alpha\in\Gamma_2}c_{\alpha\beta}$

$\cdot f^{\otimes}_{\alpha}=Se^{\otimes}_{\beta}$. 因为 $\{e^{\otimes}_{\beta}\mid\beta\in\Gamma_1\}$ 是$\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i$的基，故得 $S=\sum_{\alpha\in\Gamma_2}$

$\cdot\sum_{\gamma\in\Gamma_1}c_{\alpha\gamma}T^{\otimes}_{\alpha\gamma}$，这说明 S 是诱导线性映射 $T^{\otimes}_{\alpha\gamma}$ 的线性组合. ∎

在引入诱导线性映射 $T_1\otimes\cdots\otimes T_m$的时候，并没有说其中的符号$\otimes$是否有张映射含义. 现在我们来证明当 T_i 看作是向量空间 $L(V_i, W_i)$ 的向量时，诱导线性映射 $T_1\otimes\cdots\otimes T_m$ 可作为 $T_1,\cdots,T_m$ 的一种张量积.

定理7.2 存在唯一的张映射$\boxtimes$使$L\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i, \overset{m}{\underset{1}{\otimes}}W_i\right)$ 成为向量空间 $L(V_1,W_1),\cdots,L(V_m,W_m)$ 的张量积空间并使其中的诱导线性映射 $T_1\otimes\cdots\otimes T_m=\boxtimes(T_1,\cdots,T_m)$.

证 由练习 4.4 知，定义为 $\boxtimes(T_1,\cdots,T_m)=T_1\otimes\cdots\otimes T_m$ 的映射 $\boxtimes$ 是多重线性的而且显然是唯一的.

又由定理 7.1 知 $T_1\otimes\cdots\otimes T_m$ 生成 $L\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i, \overset{m}{\underset{1}{\otimes}}W_i\right)$，

故 $\langle\mathrm{Im}\boxtimes\rangle=\langle T_1\otimes\cdots\otimes T_m\mid T_i\in L(V_i,W_i)\rangle=L\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i, \overset{m}{\underset{1}{\otimes}}W_i\right)$.

也有 $\dim\langle\mathrm{Im}\boxtimes\rangle=\dim L\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i, \overset{m}{\underset{1}{\otimes}}W_i\right)$

$$=\left(\dim\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i\right)\left(\dim\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}W_i\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{m}\dim V_i\cdot\dim W_i$$

$$=\prod_{i=1}^{m}\dim L(V_i,W_i)$$

故多重线性映射⊠是张映射.

于是可写 $⊠(T_1,\cdots,T_m)=T_1⊠\cdots⊠T_m=T_1\otimes\cdots\otimes T_m$. 即诱导线性映射 $\bigotimes_1^m T_i$ 是 $T_1,\cdots,T_m$ 的张量积，而符号 $\otimes$ 可看作张映射⊠. 因此有 $L\left(\bigotimes_1^m V_i,\ \bigotimes_1^m W_i\right)=L(V_1,W_1)\otimes\cdots\otimes L(V_m,W_m)$. ▌

完全类似地我们也可以把 $M_{k_1\cdots k_m,n_1\cdots n_m}$ ($k_1\cdots k_m\times n_1\cdots n_m$ 阶的所有矩阵）看作 $M_{k_1,n_1},\cdots,M_{k_m,n_m}$ 的张量积空间而使 Kronecker 乘积 $A_1\otimes\cdots\otimes A_m$ 为其可合张量，其中 $A_i\in M_{k_i,n_i}$. 因此 Kronecker 乘积 $A_1\otimes\cdots\otimes A_m$ 就是 $A_1,\cdots,A_m$ 的一种张量积.

练 习 7

1. 使用 $\varphi(v_1,v_2)=v_2\otimes v_1$ 来定义映射 $\varphi:V\times V\to V\otimes V$，显然 φ 是双线性的，于是由因子化性质知存在 $T\in L(V\otimes V,\ V\otimes V)$ 使 $T\otimes=\varphi$，即 $T(v_1\otimes v_2)=v_2\otimes v_1$. 证明当 $\dim V>1$ 时，T 不是诱导线性映射，即不存在 $T_1,T_2\in L(V,V)$ 使 $T=T_1\otimes T_2$.

2. 设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的基. 定义 $T_{ij}\in L(V,V)$ 使

用 $T_{ij}e_k=\delta_{kj}e_i$ 并线性扩张．令$T=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}T_{ij}\otimes T_{ji}$，证明 $T(v_1\otimes v_2)=v_2\otimes v_1$，$\forall v_1,v_2\in V$．

（此题说明本练习第1题的T可写为诱导线性映射的线性组合）

3．证明定理7.1中的 $\{T^{\otimes}_{\alpha\gamma}\mid\alpha\in\Gamma_2,\ \gamma\in\Gamma_1\}$ 是 $L\left(\bigotimes_1^m V_i,\ \bigotimes_1^m W_i\right)$的一组基．

4．设 $T\in L\left(\bigotimes_1^m V_i,\ \bigotimes_1^m V_i\right)$并在$\bigotimes_1^m V_i$ 上定义了诱导内积，

证明 $(Tv^{\otimes},v^{\otimes})=0$，$\forall v^{\otimes}\in\bigotimes_1^m V_i\Leftrightarrow T=0$．

（提示：证明 $(Tv^{\otimes},u^{\otimes})=0$ 且从 $v^{\otimes}$ 与 $u^{\otimes}$ 只有很少区别的情形开始或参看[21]）

§8 张量空间的其它模型，共变张量与反变张量

这一节简单介绍张量空间的一些常用模型．

考虑所有m重线性函数$f:\overset{m}{\times}V\to\boldsymbol{C}$的集合$M(\overbrace{V,\cdots,V}^{m})$，回忆按通常的方法定义加法和数乘即

$$(f+ag)(v_1,\cdots,v_m)=f(v_1,\cdots,v_m)+ag(v_1,\cdots,v_m),$$
$$v_i\in V,\ a\in\boldsymbol{C},$$

则 $M(V,\cdots,V)$ 成为向量空间．我们现在讨论它的维数和基．

设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的基，$\{f_1,\cdots,f_n\}$是其对偶基，即

$f_i \in V^*$ 且 $f_i(e_j)=\delta_{ij}$, $i,j=1,\cdots,n$. 对于 $\alpha \in \Gamma_{m,n}$, 已经知道 $\prod_{i=1}^{m} f_{\alpha(i)}$ 是 m 重线性的. 我们现在证明 $\left\{\prod_{i=1}^{m} f_{\alpha(i)} \middle| \alpha \in \Gamma_{m,n}\right\}$ 是 $M(V,\cdots,V)$ 的基. 事实上设 $f\in M(V,\cdots,V)$ 是任一个 m 重线性函数, 那么

$$f=\sum_{\alpha\in\Gamma_{m,n}} f(e_\alpha)\prod_{i=1}^{m} f_{\alpha(i)}, \qquad (1)$$

其中 $e_\alpha=(e_{\alpha(1)},\cdots,e_{\alpha(m)})$.

这是因为 $\left(\prod_{i=1}^{m} f_{\alpha(i)}\right)(e_\beta)=\prod_{i=1}^{m} f_{\alpha(i)}(e_{\beta(i)})=\delta_{\alpha\beta}$, 故 (1) 式两边在 e_β 点上取相同的值 $f(e_\beta)$, $\beta\in\Gamma_{m,n}$, 再由多重线性扩张定理即知 (1) 式成立. 另一方面若存在 $c_\alpha\in\mathbf{C}$ 使

$$\sum_{\alpha\in\Gamma_{m,n}} c_\alpha \prod_{i=1}^{m} f_{\alpha(i)}=0,$$

两边在 e_β 点上取值即得 $c_\beta=0$, $\beta\in\Gamma_{m,n}$, 故 $\left\{\prod_{i=1}^{m} f_{\alpha(i)} \middle| \alpha \in\Gamma_{m,n}\right\}$ 是线性无关组, 结合 (1) 即得它是 $M(V,\cdots,V)$ 的基. 因之也得

$$\begin{aligned}\dim M(V,\cdots,V)&=|\Gamma_{m,n}|=n^m\\ &=(\dim V)^m=(\dim V^*)^m.\end{aligned} \qquad (2)$$

因为 $M(V,\cdots,V)$ 的基可用 V^* 上的元素"相乘"组成, 再由 (2) 式和张量空间的定义, 我们很容易定义张映射使 $M(V,\cdots,V)$ 成为 m 个 V^* 的张量积空间. 事实上若使用

$\otimes(g_1,\cdots,g_m)=\prod_{i=1}^{m} g_i$ 来定义 $\otimes: \overset{m}{\times} V^* \to M(V,\cdots,V)$，容易验证$\otimes$是$m$重线性的，且由$\left\{\prod_{i=1}^{m} f_{\alpha(i)} \mid \alpha\in\Gamma_{m,n}\right\}$是$M(V,\cdots,V)$的基及维数关系式（2），即知$\otimes$是张映射且$\langle \mathrm{Im}\otimes\rangle=M(V,\cdots,V)$，故 $M(V,\cdots,V)=\overset{m}{\otimes}V^*$.

$\overset{m}{\times}V$上任一多重线性函数通常称为**m重共（协）变张量**，而$\prod_{i=1}^{m} g_i=\otimes(g_1,\cdots,g_m)=g_1\otimes\cdots\otimes g_m=g^\otimes$ 为可合共变张量. 但通常也把任意的$\overset{m}{\otimes}V^*$(张映射$\otimes$为任意)称为共变张量空间，这样$\overset{m}{\times}V$上所有m重线性函数的集合$M(V,\cdots,V)$就是共变张量空间$\overset{m}{\otimes}V^*$的一个具体模型.

类似地所有m重线性函数$\varphi: \overset{m}{\times}V^*\to \mathbf{C}$的集合$M(V^*,\cdots,V^*)$也可定义为向量空间且 $\dim M(V^*,\cdots,V^*)=n^m$. 由对偶性，$M(V^*,\cdots,V^*)$自然可定义为张量空间$\overset{m}{\otimes}V$的一个具体模型. 事实上我们可以形式上定义多重线性函数 $\prod_{i=1}^{m} v_i\in M(V^*,\cdots,V^*)$，$v_i\in V$，使用$\left(\prod_{i=1}^{m} v_i\right)(g_1,\cdots,g_m)=\prod_{i=1}^{m} g_i(v_i)$，$g_i\in V^*$. 完全类似地可以证明$\left\{\prod_{i=1}^{m} e_{\alpha(i)} \mid \alpha\in\Gamma_{m,n}\right\}$是$M(V^*,\cdots,V^*)$的基. 因此若定义映射

$\otimes(v_1,\cdots,v_m)=\prod_{i=1}^{m} v_i$，则有$M(V^*,\cdots,V^*)=\overset{m}{\otimes}V$. $\overset{m}{\times}V^*$上的任一个 m 重线性函数或者一般的 $\overset{m}{\otimes}V$ 上的任一张量通常称之为**m重反（逆）变张量**.

反变张量空间$\overset{m}{\otimes}V$ 另一个常用的模型是 $M(V,\cdots,V)^*$，即多重线性函数空间 $M(V,\cdots,V)$ 上所有线性函数构成的空间（也就是 $M(V,\cdots,V)$ 的对偶空间）. 因为对于 $v_i\in V$，我们可以定义线性函数 $\prod_{i=1}^{m} v_i\in M(V,\cdots,V)^*$，使用 $\left(\prod_{i=1}^{m} v_i\right)(f)=f(v_1,\cdots,v_m)$，$f\in M(V,\cdots,V)$. 由前面知道 $\left\{\prod_{i=1}^{m} f_{\alpha(i)}\,|\,\alpha\in\Gamma_{m,n}\right\}$ 是 $M(V,\cdots,V)$ 的基，但由定义有

$$\left(\prod_{i=1}^{m} e_{\beta(i)}\right)\left(\prod_{i=1}^{m} f_{\alpha(i)}\right)=\left(\prod_{i=1}^{m} f_{\alpha(i)}\right)(e_{\beta(1)},\cdots,e_{\beta(m)})$$

$$=\prod_{i=1}^{m} f_{\alpha(i)}(e_{\beta(i)})=\delta_{\alpha\beta},$$

故$\left\{\prod_{i=1}^{m} e_{\alpha(i)}\,|\,\alpha\in\Gamma_{m,n}\right\}$是$\left\{\prod_{i=1}^{m} f_{\alpha(i)}\,|\,\alpha\in\Gamma_{m,n}\right\}$的对偶基，因而是$M(V,\cdots,V)^*$的基. 这样若定义$\otimes(v_1,\cdots,v_m)=\prod_{i=1}^{m} v_i$，则 $M(V,\cdots,V)^*$ 就成为反变张量空间 $\overset{m}{\otimes}V$ 的另一个具体模型. $v_1\otimes\cdots\otimes v_m=v^{\otimes}$ 是可合反变张量.

现在我们来看当 V 的基变化时，张量坐标的变化情

况. 设 V 的基由 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 换为新的基 $\{e_1',\cdots,e_n'\}$，它们的对偶基分别为 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 与 $\{f_1',\cdots,f_n'\}$. 这时对应于 $\overset{m}{\otimes}V$ 的基则由 $\{e_\alpha^\otimes|\alpha\in\Gamma_{m,n}\}$ 换为 $\{e_\alpha'^\otimes|\alpha\in\Gamma_{m,n}\}$，而 $\overset{m}{\otimes}V^*$ 的基则由 $\{f_\alpha^\otimes|\alpha\in\Gamma_{m,n}\}$ 换为 $\{f_\alpha'^\otimes|\alpha\in\Gamma_{m,n}\}$.

于是对任意的 $z\in\overset{m}{\otimes}V$ 就有

$$z=\sum_{\alpha\in\Gamma_{m,n}}c_\alpha e_\alpha^\otimes=\sum_{\gamma\in\Gamma_{m,n}}c_\gamma' e_\gamma'^\otimes. \qquad (3)$$

设 $P=(p_{ij})$ 是基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$到 $\{e_1',\cdots,e_n'\}$ 的过渡矩阵，即

$$e_j'=\sum_{i=1}^n p_{ij}e_i,\quad j=1,\cdots,n \qquad (4)$$

那么$e_\gamma'^\otimes=\left(\sum_{i=1}^n p_{i\gamma(1)}e_i\right)\otimes\cdots\otimes\left(\sum_{i=1}^n p_{i\gamma(m)}e_i\right)=\sum_{\alpha\in\Gamma_{m,n}}\prod_{i=1}^m$

$\cdot\ p_{\alpha(i)\gamma(i)}e_\alpha^\otimes$.

代入（3）式即得

$$c_\alpha=\sum_{\gamma\in\Gamma_{m,n}}\prod_{i=1}^m p_{\alpha(i)\gamma(i)}c_\gamma',\ \forall\alpha\in\Gamma_{m,n}. \qquad (5)$$

这是反变张量的一个张量坐标变换公式.（注意这是旧张量坐标用新张量坐标表示）

我们再来看 $\overset{m}{\otimes}V^*$ 的一个张量 $f=\sum_{\alpha\in\Gamma_{m,n}}d_\alpha f_\alpha^\otimes=$

$\sum_{\gamma\in\Gamma_{m,n}}d_\gamma' f_\gamma'^\otimes$. 要导出 d_α 与 d_γ' 的关系当然可以象上面那样利用 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 到 $\{f_1',\cdots,f_n'\}$ 的过渡矩阵来推. 但这里我们利用$\overset{m}{\otimes}V^*$ 的一个模型 $M(V,\cdots,V)$ 来推，即把 f 看

作 $\overset{m}{\times} V$ 上的多重线性函数．这时由(1)式就有 $d_\alpha=f(e_\alpha)$，$d'_\gamma=f(e'_\gamma)$．用多重线性展开即得

$$f(e'_\gamma)=f\left(\sum_{i=1}^{n} p_{i\gamma(1)}e_i,\cdots,\sum_{i=1}^{n} p_{i\gamma(m)}e_i\right)$$

$$=\sum_{\alpha\in\Gamma_{m,n}}\prod_{i=1}^{m} p_{\alpha(i)\gamma(i)}f(e_\alpha)$$

故有

$$d'_\gamma=\sum_{\alpha\in\Gamma_{m,n}}\prod_{i=1}^{m} p_{\alpha(i)\gamma(i)}d_\alpha,\quad \forall\gamma\in\Gamma_{m,n}. \qquad (6)$$

这是共变张量的张量坐标变换公式．(利用张量空间的同构性质，显然（6）式对于 $\overset{m}{\otimes}V^*$ 的其它模型也成立)

(5)式与(6)式有点体现了反（逆）变张量与共（协）变张量名称的含义．

另外反变张量坐标的变换公式通常也写为新张量坐标用旧张量坐标表示的形式，不难推得（5）式可写为

$$c'_\gamma=\sum_{\alpha\in\Gamma_{m,n}}\prod_{i=1}^{m} q_{\alpha(i)\gamma(i)}c_\alpha,\quad \forall\gamma\in\Gamma_{m,n} \qquad (7)$$

其中 $Q=(q_{ij})=(P^{-1})^{\mathrm{T}}$．由第一章练习 9.4 知，$Q$ 恰是从基 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 到基 $\{f'_1,\cdots,f'_n\}$ 的过渡矩阵，称为反变矩阵．

最后我们简单介绍一下混合张量空间的模型．张量空间 $\overbrace{V\otimes\cdots\otimes V}^{p}\otimes\overbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}^{q}$ 简记为 V^p_q，称为 p 重反变 q 重共变张量空间（混合张量空间）．完全类似我们可以定义张映射使多重线性函数的集合 $M(\overbrace{V^*,\cdots,V^*}^{p},\overbrace{V,\cdots,V}^{q})$ 成为 V^p_q 的一个具体模型．

设 V 的一组基为 $\{e_1, \cdots, e_n\}$，通常取 V^* 的基为对偶基 $\{f_1, \cdots, f_n\}$. 这样 $M(\overbrace{V^*,\cdots,V^*}^{p},\overbrace{V,\cdots,V}^{q})$ 的一组基就是

$$\left\{\prod_{i=1}^{p} e_{\alpha(i)} \prod_{j=1}^{q} f_{\beta(j)} \,\middle|\, \alpha\in\Gamma_{p,n}, \beta\in\Gamma_{q,n}\right\}.$$

所说的张映射自然应定义为

$$\otimes(e_{\alpha(1)},\cdots,e_{\alpha(p)},f_{\beta(1)},\cdots,f_{\beta(q)})=\prod_{i=1}^{p} e_{\alpha(i)} \prod_{j=1}^{q} f_{\beta(j)}$$

并进行多重线性扩张. 而 V_q^p 的一组基则可写为

$$\{e_{\alpha(1)}\otimes\cdots\otimes e_{\alpha(p)}\otimes f_{\beta(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\beta(q)}$$
$$=e_\alpha^\otimes\otimes f_\beta^\otimes \mid \alpha\in\Gamma_{p,n}, \beta\in\Gamma_{q,n}\}$$

和前面类似，设 V 的一组新基为 $\{e_1',\cdots,e_n'\}$，其对偶基为 $\{f_1', \cdots, f_n'\}$，则任一张量 $g\in V_q^p$ 就能表示为

$$g=\sum_{\alpha\in\Gamma_{p,n}, \beta\in\Gamma_{q,n}} g_{\alpha\beta} e_\alpha^\otimes\otimes f_\beta^\otimes$$

$$=\sum_{\gamma\in\Gamma_{p,n}, \omega\in\Gamma_{q,n}} g'_{\gamma\omega} e_\gamma'^\otimes\otimes f_\omega'^\otimes$$

把 g 看作多重线性函数，类似于公式(1)就有

$$g_{\alpha\beta}=g(f_{\alpha(1)},\cdots,f_{\alpha(p)},e_{\beta(1)},\cdots,e_{\beta(q)}),$$
$$g'_{\gamma\omega}=g(f'_{\gamma(1)},\cdots,f'_{\gamma(p)},e'_{\omega(1)},\cdots,e'_{\omega(q)}).$$

注意到 $f_j'=\sum_{i=1}^{n} q_{ij} f_i$，$e_j'=\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$，$j=1,\cdots,n$，代入上式即得混合张量坐标的变换公式：

$$g'_{\gamma\omega}=\sum_{\alpha\in\Gamma_{p,n}, \beta\in\Gamma_{q,n}} \prod_{i=1}^{p} q_{\alpha(i)\gamma(i)}$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{q} p_{\beta(j)\omega(j)} g_{\alpha\beta},$$

$$\forall \gamma \in \Gamma_{p,n}, \omega \in \Gamma_{q,n}. \qquad (8)$$

张量坐标变换公式（6），（7）和（8）对于实际张量的计算是很有用的．某些著作还把它们作为张量的定义．但这里我们不再讨论下去．

练 习 8

1．试定义一个简单的张映射 $\boxtimes: \overset{m}{\times} V^* \to L(\overset{m}{\otimes} V, C) = (\overset{m}{\otimes} V)^*$，使得 $\overset{m}{\boxtimes} V^* = (\overset{m}{\otimes} V)^*$．

2．证明 $\overset{m}{\underset{1}{\times}} V_i$ 上所有 m 重线性函数的集合 $M(V_1, \cdots, V_m)$ 可作为 $V_1^*, \cdots, V_m^*$ 的张量积空间的一个模型．

3．设 $M(V_1, \cdots, V_m : W)$ 表示所有 m 重线性映射 $\varphi: \overset{m}{\underset{1}{\times}} V_i \to W$ 组成的向量空间（第一节例(h)），证明 $\dim M(V_1, \cdots, V_m : W) = \dim W \cdot \prod_{i=1}^{m} \dim V_i$．

（提示：设 V_i 的基为 $\{e_{i1}, \cdots, e_{in_i}\}$，$W$ 的基为 $\{w_1, \cdots, w_n\}$，又 $v_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} e_{ij} \in V_i$，定义 $\varphi_{\gamma,k}(v_1, \cdots, v_m) = \prod_{i=1}^{m} a_{i\gamma(i)} w_k$，$\gamma \in \Gamma(n_1, \cdots, n_m)$，$k = 1, \cdots, n$．证明 $\varphi_{\gamma,k}$ 为 $M(V_1, \cdots, V_m : W)$ 的一组基）

第三章　对称多重线性映射，张量的对称类

本章讨论张量空间的各种对称类（子空间）．它们对于研究具有一定对称性质的多重线性映射起着重要的作用；它们是现代分析、微分几何、理论物理、量子力学等学科的有力工具．本章用到群的特征标正交关系，不熟悉群表示论的读者应先看附录．

§1　置换算子

这一章我们都是讨论所有 V_i 都相同的张量空间 $V\otimes\cdots\otimes V=\overset{m}{\otimes}V$，而且随时可以认为 V 是内积空间．我们总假定 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$是V的一组有序基，于是$E_\otimes=\{e_\gamma^\otimes|\gamma\in\Gamma_{m,n}\}$ 就是$\overset{m}{\otimes}V$ 的一组有序基（规定按字典次序排列）．又当 E 是内积空间 V 的规格化正交基时，则 $E_\otimes$ 关于诱导内积是$\overset{m}{\otimes}V$ 的规格化正交基．

对于 $\sigma\in S_m$(m 阶置换群)，定义映射

$$\varphi(v_1,\cdots,v_m)=v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(m)},v_i\in V,\ i=1,\cdots,m.$$

容易看出 $\varphi:\overset{m}{\times}V\to\overset{m}{\otimes}V$是 m 重线性的，由唯一因子化性质知存在唯一的$T\in L(\overset{m}{\otimes}V,\overset{m}{\otimes}V)$使$T\otimes=\varphi$，即$Tv^\otimes=v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(m)}$．$T$ 称为张量空间 $\overset{m}{\otimes}V$上的**置换算子**，它依赖于σ，记

作 $T=P(\sigma)$. 于是可写 $P(\sigma)v^{\otimes}=v^{\otimes}_{\sigma^{-1}}$, 也有 $P(\sigma^{-1})v^{\otimes}=v^{\otimes}_{\sigma}$.

首先容易看到置换算子 $P(\sigma)$ 关于基 $E_{\otimes}$ 的矩阵表示是置换矩阵，具体些就是：

定理1.1 对于任意 $\sigma\in S_m$，有

$$([P(\sigma)]^{E_{\otimes}}_{E_{\otimes}})_{\alpha,\beta}=\delta_{\alpha,\beta\sigma^{-1}},\quad \alpha,\beta\in\Gamma_{m,n}.$$

证 因为
$$\begin{aligned}P(\sigma)e^{\otimes}_{\beta}&=P(\sigma)e_{\beta(1)}\otimes\cdots\otimes e_{\beta(m)}\\&=e_{\beta(\sigma^{-1}(1))}\otimes\cdots\otimes e_{\beta(\sigma^{-1}(m))}\\&=e^{\otimes}_{\beta\sigma^{-1}}=\sum_{\alpha\in\Gamma_{m,n}}\delta_{\alpha,\beta\sigma^{-1}}e^{\otimes}_{\alpha},\ \forall\beta\in\Gamma_{m,n}.\end{aligned}$$

故由矩阵表示的定义即得

$[P(\sigma)]^{E_{\otimes}}_{E_{\otimes}}=(\delta_{\alpha,\beta\sigma^{-1}})_{\substack{\alpha\in\Gamma_{m,n}\\ \beta\in\Gamma_{m,n}}}$，显然这是个置换矩阵. ∎

置换算子对于我们往后所要研究的内容颇为重要，我们把它的一些性质概括为下面的定理.

定理1.2 设 $\sigma,\pi\in S_m$，则有

(a) $P(\sigma\pi)=P(\sigma)P(\pi)$.

(b) $P(e)=I_{\overset{m}{\otimes}V}$ (e 是 S_m 的恒等置换, $I_{\overset{m}{\otimes}V}$ 是张量空间 $\overset{m}{\otimes}V$ 的恒等算子).

(c) $P(\sigma)$是可逆的且 $P(\sigma^{-1})=P(\sigma)^{-1}$.

(d) $P(\sigma)$关于$\overset{m}{\otimes}V$ 的诱导内积是酉算子，即$P(\sigma)^{-1}=P(\sigma)^{*}$.

(e) 假如 $\dim V\geqslant 2$，那么 $P(\sigma)=P(\pi)$当且仅当 $\sigma=\pi$.

(f) $\operatorname{tr}(P(\sigma))=n^{c(\sigma)}$，其中 $n=\dim V$，$c(\sigma)$是 σ 分解

为不相交的循环置换乘积中因子的数目（包括长度为1的循环置换）.

证 （a） 由定义有$P(\sigma)P(\pi)v^{\otimes}=P(\sigma)v^{\otimes}_{\pi^{-1}}=v^{\otimes}_{\pi^{-1}\sigma^{-1}}$
$=v^{\otimes}_{(\sigma\pi)^{-1}}=P(\sigma\pi)v^{\otimes}$.

（b） 是明显的.

（c） 由（a）与（b）即得.

（d） 由诱导内积定义有

$$(P(\sigma)v^{\otimes},u^{\otimes})=\prod_{i=1}^{m}(v_{\sigma^{-1}(i)},u_i)=\prod_{i=1}^{m}(v_i,u_{\sigma(i)})$$
$$=(v^{\otimes},u^{\otimes}_{\sigma})=(v^{\otimes},P(\sigma^{-1})u^{\otimes}).$$

由可合张量生成$\overset{m}{\otimes}V$即得$P(\sigma)^{-1}=P(\sigma^{-1})=P(\sigma)^{*}$.

（e） 由$\dim V\geqslant 2$，故存在线性无关的$e_1,e_2\in V$. 令$v_k=e_1+ke_2,k=1,\cdots,m$，显然当$i\neq j$时，$v_i$与$v_j$是线性无关的. 现在若$P(\sigma)=P(\pi)$，则$v^{\otimes}_{\sigma^{-1}}=v^{\otimes}_{\pi^{-1}}\neq 0$，由第二章定理3.3知$v_{\sigma^{-1}(i)}$与$v_{\pi^{-1}(i)}$线性相关，因而$\sigma^{-1}(i)=\pi^{-1}(i)$，$i=1,\cdots,m$，故$\sigma^{-1}=\pi^{-1}$，$\sigma=\pi$. 反方向的结论显然.

（f） 由定理1.1有$\mathrm{tr}(P(\sigma))=\sum\limits_{\alpha\in\Gamma_{m,n}}\delta_{\alpha,\alpha\sigma^{-1}}=$ $\sum\limits_{\alpha\in\Gamma_{m,n}}\delta_{\alpha\sigma,\alpha}=|\{\alpha\in\Gamma_{m,n}\mid\alpha\sigma=\alpha\}|$. 此式表明$P(\sigma)$的迹就是满足$\alpha\sigma=\alpha$的所有$\alpha$的数目. 当把$\sigma$分解为$c(\sigma)$个不相交的循环置换的乘积时，容易看到对于每个循环置换，α对应的分量必须相同，但它可独立取n个不同的整数，于是得

$$\mathrm{tr}(P(\sigma))=|\{\alpha\in\Gamma_{m,n}\mid\alpha\sigma=\alpha\}|=n^{c(\sigma)}. \qquad \blacksquare$$

（本节定理可参看[12]）

练　习　1

1. 假定 $m>1$，证明除非 $\sigma=e$ 或 $\dim V=1$，否则 $P(\sigma)$ 不是诱导线性算子.（即不存在 $T_i\in L(V,V)$ 使 $P(\sigma)=\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}T_i$）

2. 设 τ 是 S_m 的一个对换，证明若 $P(\tau)$ 写成 k 个诱导线性算子之和，则 $k\geqslant n^2$（$n=\dim V$）.

（提示：第二章练习 7.2 和练习 3.5）

3. 假定 $\dim V>1$，证明 $\sigma\to P(\sigma)$ 是群 S_m 的一个可约算子表示.

§2　对称多重线性映射，对称化算子

现在我们从分解多重线性映射为各种对称部分开始，引入本章的重要概念——张量的对称类.

一个多重线性映射 $\psi:\overset{m}{\times}V\to W$ 称为完全对称的，如果对于所有 $\sigma\in S_m$ 均成立

$$\psi(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(m)})=\psi(v_1,\cdots,v_m).\qquad(1)$$

对于任意的多重线性映射 $\varphi:\overset{m}{\times}V\to W$，容易构造一个完全对称的多重线性映射如下：令

$$1_\varphi(v_1,\cdots,v_m)=\frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m}\varphi(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(m)}).$$

由 $1_\varphi(v_{\pi(1)},\cdots,v_{\pi(m)})=\dfrac{1}{m!}\displaystyle\sum_{\sigma\in S_m}\varphi(v_{\pi\sigma(1)},\cdots,v_{\pi\sigma(m)})$

$$=\frac{1}{m!}\sum_{\tau\in S_m}\varphi(v_{\tau(1)},\cdots,v_{\tau(m)})=1_\varphi(v_1,\cdots,v_m)$$

知 1_φ 满足(1). 1_φ 被称为 φ 的完全对称部分.

显然若多重线性映射 ψ 满足(1),则

$$\frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m}\psi(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(m)})=\psi(v_1,\cdots,v_m). \quad (2)$$

反之若 ψ 满足(2), 类似于前面的推导, ψ 也满足(1). 故(1)与(2)等价.

类似地若多重线性映射 ψ 对于任意 $\sigma\in S_m$ 满足

$$\psi(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(m)})=\varepsilon(\sigma)\psi(v_1,\cdots,v_m), \quad (3)$$

则称 ψ 为反对称的, 且(3)与下面的式子等价.

$$\frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m}\varepsilon(\sigma^{-1})\psi(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(m)})=\psi(v_1,\cdots,v_m). \quad (4)$$

对于任意的多重线性映射 φ,令

$$\varepsilon_\varphi(v_1,\cdots,v_m)=\frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m}\varepsilon(\sigma^{-1})\varphi(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(m)})$$

容易验证 ε_φ 满足(4)(当然也满足(3)). ε_φ 称为φ关于 G 的反对称部分.

当 $m=2$ 时, φ 就等于完全对称与反对称两部分之和, 即

$$\begin{aligned}&1_\varphi(v_1,v_2)+\varepsilon_\varphi(v_1,v_2)\\&=\frac{1}{2}(\varphi(v_1,v_2)+\varphi(v_2,v_1))+\frac{1}{2}(\varphi(v_1,v_2)-\varphi(v_2,v_1))\\&=\varphi(v_1,v_2)\end{aligned}$$

也就是 $\varphi=1_\varphi+\varepsilon_\varphi$. 但当 $m>2$ 时, 一般就不仅是这两部分, 下面我们用群的特征标理论来刻画其它部分.

设 G 是 S_m 的子群，χ 是群 G 的不可约特征标（看附录），如果多重线性映射 $\psi: \overset{m}{\times} V \to W$ 满足

$$\frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma^{-1}) \psi(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(m)}) = \psi(v_1, \cdots, v_m) \tag{5}$$

则 ψ 被称为关于 G 和 χ 对称的.（完全对称和反对称是(5)的特殊情形）

对于任意的多重线性映射 $\varphi: \overset{m}{\times} V \to W$，令

$$\chi_\varphi(v_1, \cdots, v_m) = \frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma^{-1}) \varphi(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(m)}),$$

则 χ_φ 满足(5)，事实上利用不可约特征标的正交关系即得

$$\frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{\pi \in G} \chi(\pi^{-1}) \chi_\varphi(v_{\pi(1)}, \cdots, v_{\pi(m)})$$

$$= \frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{\pi \in G} \chi(\pi^{-1}) \cdot \frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma^{-1}) \cdot \varphi(v_{\pi\sigma(1)}, \cdots, v_{\pi\sigma(m)})$$

$$= \frac{\chi(e)^2}{|G|^2} \sum_{\tau \in G} \left(\sum_{\pi \in G} \chi(\pi^{-1}) \chi(\tau^{-1}\pi) \right) \varphi(v_{\tau(1)}, \cdots, v_{\tau(m)})$$

$$= \frac{\chi(e)^2}{|G|^2} \sum_{\tau \in G} \left(\frac{|G|}{\chi(e)} \chi(\tau^{-1}) \right) \varphi(v_{\tau(1)}, \cdots, v_{\tau(m)})$$

（附录定理4.2）

$$= \chi_\varphi(v_1, \cdots, v_m). \tag{6}$$

χ_φ 称为 φ 关于 G 和 χ 的对称部分.

这里要注意，χ_φ 仍然是多重线性映射，又若 ψ 本身是关于 G 和 χ 对称的（满足(5)），则 $\chi_\psi = \psi$.

现假定$I(G)$表示G的全部不可约特征标，则

$$\sum_{\chi\in I(G)}\chi_{\varphi}(v_1,\cdots,v_m)=\sum_{\chi\in I(G)}\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})$$

$$\cdot\varphi(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(m)})$$

$$=\sum_{\sigma\in G}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in I(G)}\chi(e)\chi(\sigma^{-1})\right)\varphi(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(m)})$$

$$=\sum_{\sigma\in G}\delta_{e,\sigma^{-1}}\varphi(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(m)}) \qquad \text{(附录定理4.10)}$$

$$=\varphi(v_1,\cdots,v_m). \qquad (7)$$

这就是说φ等于所有对称部分的和，即$\sum\limits_{\chi\in I(G)}\chi_{\varphi}=\varphi$.

我们知道张量空间$\overset{m}{\otimes}V$的张映射$\otimes$是多重线性映射，故也有关于G和χ的对称部分$\chi_{\otimes}$，因而有

$$\sum_{\chi\in I(G)}\chi_{\otimes}=\otimes. \qquad (8)$$

因为$\chi_{\otimes}$还是多重线性映射，由唯一因子化性质知，存在唯一的线性算子记作$T(G,\chi)\in L(\overset{m}{\otimes}V,\overset{m}{\otimes}V)$，使

$$\chi_{\otimes}=T(G,\chi)\otimes \qquad (9)$$

即
$$\chi_{\otimes}(v_1,\cdots,v_m)=T(G,\chi)v^{\otimes}.$$

另一方面，由对称部分的定义有

$$\chi_{\otimes}(v_1,\cdots,v_m)=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})\otimes(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(m)})$$

$$=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})v_{\sigma}^{\otimes}=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})P(\sigma^{-1})v^{\otimes}$$

$$=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)P(\sigma)\otimes(v_1,\cdots,v_m).$$

故

$$T(G,\chi)=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)P(\sigma).\qquad(10)$$

算子$T(G,\chi)$可看作把张映射$\otimes$变换为**对称张映射**$\chi_{\otimes}$((9)式)，因而称之为**对称化算子**.它也是本章的重要概念，它的主要性质可归纳为：

定理2.1 设χ，μ是群G(S_m的子群)的不可约特征标，则有

(a) $T(G,\chi)^2=T(G,\chi)$.

(b) $\sum_{\chi\in I(G)}T(G,\chi)=I_{\overset{m}{\otimes}V}$.

(c) $T(G,\chi)^*=T(G,\chi)$. (关于$\overset{m}{\otimes}V$的诱导内积)

(d) 若$\chi\neq\mu$，则$T(G,\chi)T(G,\mu)=0$.

证 (a) 推导同于(6)式，这里不妨重复一下.

$$T(G,\chi)^2=\frac{\chi(e)^2}{|G|^2}\sum_{\sigma\in G}\sum_{\pi\in G}\chi(\sigma)\chi(\pi)P(\sigma)P(\pi)\ (\text{令}\tau=\sigma\pi)$$

$$=\frac{\chi(e)^2}{|G|^2}\sum_{\tau\in G}\Big(\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\chi(\sigma^{-1}\tau)\Big)P(\tau)$$

$$=\frac{\chi(e)^2}{|G|^2}\sum_{\tau\in G}\frac{|G|}{\chi(e)}\chi(\tau)P(\tau)=T(G,\chi).$$

(b) 把(9)式代入(8)式即得，也可象(7)式那样

$$\sum_{\chi\in I(G)}T(G,\chi)=\sum_{\chi\in I(G)}\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)P(\sigma)$$

$$=\sum_{\sigma\in G}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in I(G)}\chi(e)\chi(\sigma)\right)P(\sigma)=P(e)=I_{\overset{m}{\otimes}V}.$$

(c) $$T(G,\chi)^*=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\overline{\chi(\sigma)}P(\sigma)^*$$

$$=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})P(\sigma^{-1})=T(G,\chi).$$

(d) 它可由(a)与(b)推得（第一章练习8.3），也可直接计算如下：

$$T(G,\chi)T(G,\mu)=\frac{\chi(e)\mu(e)}{|G|^2}\sum_{\sigma\in G}\sum_{\pi\in G}\chi(\sigma)$$

$$\cdot\mu(\pi)P(\sigma\pi)$$

$$=\frac{\chi(e)\mu(e)}{|G|^2}\sum_{\tau\in G}\left(\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\mu(\sigma^{-1}\tau)\right)P(\tau)=0.$$

（附录定理4.2） ▎

这定理的(a)说明 $T(G,\chi)$是$\overset{m}{\otimes}V$ 上的投影算子，它的投影子空间记作$V_\chi(G)$，称为关于G和χ的**张量对称类**，即

$$V_\chi(G)=\mathrm{Im}T(G,\chi)=\langle\mathrm{Im}\chi_{\otimes}\rangle.$$

当$\overset{m}{\otimes}V$ 定义了诱导内积时，由(a)和(c)知$T(G,\chi)$还是正交投影．于是利用(b)和第一章定理8.2即得下面的重要分解式．

定理2.2 张量空间$\overset{m}{\otimes}V$等于所有张量对称类的直和，

即
$$\overset{m}{\otimes}V=\sum_{\chi\in I(G)}V_\chi(G).$$

又当$\overset{m}{\otimes}V$ 定义了诱导内积时，上式还是正交直和，即若写

$I(G)=\{\chi_1,\cdots,\chi_h\}$，则

$$\overset{m}{\otimes}V=V_{\chi_1}(G)\perp\cdots\perp V_{\chi_h}(G). \qquad \blacksquare$$

对于固定的 G 和 χ，即在同一个张量对称类 $V_\chi(G)$ 上讨论问题时，我们以后常写对称张映射 $\chi_\otimes=*$，并采用如下的记号：

$$T(G,\chi)v^\otimes=\chi_\otimes(v_1,\cdots,v_m)=v_1*\cdots*v_m=v^*.$$

v^* 称为张量对称类 $V_\chi(G)$ 的**可合对称张量**（**或可合元素**）。因为 $V_\chi(G)$ 由可合元素生成，故可取可合元素作为基（看后面第 4 节）。

下面的定理说明张量对称类对于研究对称多重线性映射的重要作用。它把一般的对称多重线性映射问题化为线性映射问题，即对称张映射 $*$ 具有**对称因子化性质**.

定理2.3 如果 $\psi:\overset{m}{\times}V\to W$ 是关于 G 和 χ 对称的多重线性映射，则存在唯一的线性映射 $T_\chi\in L(V_\chi(G),W)$，使 $\psi=T_\chi*$，即

$$\psi(v_1,\cdots,v_m)=T_\chi v^*.$$

证 首先由 $\otimes$ 的唯一因子化性质知，存在唯一的 $T\in L(\overset{m}{\otimes}V,W)$，使 $\psi=T\otimes$. 又由 ψ 关于 G 和 χ 对称就有

$$\begin{aligned}\psi(v_1,\cdots,v_m)&=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})\psi(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(m)})\\&=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})Tv_\sigma^\otimes\\&=T\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})P(\sigma^{-1})v^\otimes\\&=Tv^*.\end{aligned}$$

于是同于第一章定理7.1，知存在唯一的$T_\chi=T|_{V_\chi(G)}\in L(V_\chi(G),W)$，使

$$\psi(v_1,\cdots,v_m)=T_\chi v^*. \qquad \blacksquare$$

（本节定理可参看[31]）

练 习 2

1. 证明对于$\pi\in G$有$P(\pi)T(G,\chi)=T(G,\chi)P(\pi)$. 又若$\chi(e)=1$,则
$P(\pi)T(G,\chi)=\chi(\pi^{-1})T(G,\chi)$

（提示：当$\chi(e)=1$时，$\chi(\sigma\pi)=\chi(\sigma)\chi(\pi)$）

2. 证明对于$\sigma\in G$, $P(\sigma^{-1})v^*=v^*_\sigma$. 又若$\chi(e)=1$时，则$v^*_\sigma=\chi(\sigma)v^*$.

3. 若$\chi(e)=1$，证明$\psi:\overset{m}{\times}V\to W$关于$G$和$\chi$是对称(即满足(5))的充要条件为

$$\psi(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(m)})=\chi(\sigma)\psi(v_1,\cdots,v_m).$$

4. 假定$f_1,\cdots,f_m\in V^*$是线性函数，证明多重线性函数

$$\psi:\overset{m}{\times}V\to\boldsymbol{C},\ \psi=\sum_{\pi\in G}\chi(\pi)\prod_{t=1}^{m}f_{\pi(t)}$$
是关于G和χ对称的.

5. 证明多重线性映射$\psi:\overset{m}{\times}V\to W$关于$S_m$是反对称(即满足(3))的充要条件为对于任意的$i\neq j$，当$v_i=v_j$时，$\psi(v_1,\cdots,v_m)=0$.

（提示：置换σ可表示为对换的乘积）

§3 对称张量的一些性质

张量对称类$V_\chi(G)$是张量空间$\overset{m}{\otimes}V$的子空间，$V_\chi(G)$的

可合元素一般并不是$\overset{m}{\otimes}V$的可合元素（定义不同），但也有一些类似的性质，试比较之.（注意，当$G=\{e\}$时，$V_\chi(e)=\overset{m}{\otimes}V$.故张量空间$\overset{m}{\otimes}V$是一种特殊的张量对称类.于是$V_\chi(G)$的一般性质自然也适用于$\overset{m}{\otimes}V$. 另外本章都认为$G$是$S_m$的子群，$\chi$是群$G$的不可约特征标而不一定每次说明）

定理3.1 若$v^*+\cdots+u^*=0$，则对于任意的关于G和χ对称的多重线性映射$\psi: \overset{m}{\times}V\to W$，都有

$$\psi(v_1,\cdots,v_m)+\cdots+\psi(u_1,\cdots,u_m)=0.$$

证 由定理2.3，知存在$T_\chi\in L(V_\chi(G),W)$，使$\psi(v_1,\cdots,v_m)=T_\chi v^*$，也有$\psi(u_1,\cdots,u_m)=T_\chi u^*$，于是$\psi(v_1,\cdots,v_m)+\cdots+\psi(u_1,\cdots,u_m)=T_\chi(v^*+\cdots+u^*)=0$. ❙

定理3.2 若$v_1*\cdots*v_m=0$，则$v_1,\cdots,v_m$线性相关.

证 假定$v^*=0$而$v_1,\cdots,v_m$线性无关，则可扩充它们而组成V的基$v_1,\cdots,v_n$，这样$\{v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(m)}\mid\sigma\in G\}$就是$\overset{m}{\otimes}V$的基$\{v_{\gamma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\gamma(m)}\mid\gamma\in\Gamma_{m,n}\}$的一部分，因而是线性无关的. 现在

$$0=v^*=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(m)},$$

故必然所有系数都为0，但$\chi(e)\neq0$，此矛盾说明$v_1,\cdots,v_m$线性相关. ❙

定理3.3 若$v^*=u^*\neq0$，则$\langle v_1,\cdots,v_m\rangle=\langle u_1,\cdots,u_m\rangle$.

证 令$W=\langle v_1,\cdots,v_m\rangle$. 设$e_1,\cdots,e_k$是$W$的基，假定有某个$u_i\notin W$，那么我们可以扩充使$e_1,\cdots,e_k,e_{k+1}=u_i,e_{k+2},\cdots,e_n$成为$V$的基. 设$e_1,\cdots,e_n$的对偶基为$f_1,\cdots,f_n\in V^*$，那么

当 $k<r\leqslant n$ 时，$f_r(v_j)=0, j=1,\cdots,m.$ (1)

当 $1\leqslant s\leqslant k$ 时，$f_s(u_i)=0.$ (2)

对于 $\alpha\in\Gamma_{m,n}$，我们知道 $\prod_{t=1}^{m} f_{\alpha(t)}$ 是 m 重线性函数，由 $\otimes$ 的因子化性质，知存在 $T_\alpha\in L(\overset{m}{\otimes}V,\mathbf{C})$ 使 $\prod_{t=1}^{m} f_{\alpha(t)}=T_\alpha\otimes$，所以 $\prod_{t=1}^{m} f_{\alpha(t)}(v_t)=T_\alpha v^\otimes$，特别有 $T_\alpha e_\gamma^\otimes=\prod_{t=1}^{m} f_{\alpha(t)}(e_{\gamma(t)})=\delta_{\alpha\gamma}$.

现在由 $v^*\neq 0$，就一定存在 $\beta\in\Gamma_{m,n}$ 使 $T_\beta v^*\neq 0$（不然的话，写 $v^*=\sum_{\gamma\in\Gamma_{m,n}} a_\gamma e_\gamma^\otimes$，就有 $0=T_\beta v^*=\sum_{\gamma\in\Gamma_{m,n}} a_\gamma T_\beta e_\gamma^\otimes=\sum_{\gamma\in\Gamma_{m,n}} a_\gamma\delta_{\beta\gamma}=a_\beta, \forall\beta\in\Gamma_{m,n}$，这说明 $v^*=0$,矛盾），于是

$$0\neq T_\beta v^*=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})T_\beta v_\sigma^\otimes$$

$$=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})\prod_{t=1}^{m} f_{\beta(t)}(v_{\sigma(t)}). \quad (3)$$

此式说明 $\beta\in\Gamma_{m,k}$（否则便有某 $\beta(t)>k$,这由(1)得(3)的右边为0，矛盾），但由 $\beta\in\Gamma_{m,k}$ 及(2)式又得 $T_\beta v^*=T_\beta u^*=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})\prod_{t=1}^{m} f_{\beta(t)}(u_{\sigma(t)})=0$. 此矛盾说明每个 $u_i\in\langle v_1,\cdots,v_m\rangle$. 类似可证每个 $v_i\in\langle u_1,\cdots,u_m\rangle$. ∎

定理3.4 设 V 是内积空间，$V_\chi(G)$ 上定义了相应的诱导内积，则

$$(v^*,u^*)=(v^\otimes,u^*)=(v^*,u^\otimes)$$
$$=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\prod_{t=1}^{m}(v_t,u_{\sigma(t)}),$$
$$\forall v^*,u^*\in V_\chi(G).$$

证 因为$T(G,\chi)$是正交投影，故有

$$(v^*,u^*)=(T(G,\chi)v^\otimes,T(G,\chi)u^\otimes)$$
$$=(v^\otimes,T(G,\chi)^2u^\otimes)=(v^\otimes,u^*)$$
$$=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)(v^\otimes,u^\otimes_\sigma)$$
$$=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\prod_{t=1}^{m}(v_t,u_{\sigma(t)}).\qquad \blacksquare$$

定理3.5 设$e_1,\cdots,e_n$是内积空间V的规格化正交基，则

(a) $(e^*_\alpha,e^*_\beta)=\dfrac{\chi(e)}{|G|}\sum\limits_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\delta_{\alpha,\beta\sigma},\forall\alpha,\beta\in\Gamma_{m,n}$,

(b) $\|e^*_\alpha\|^2=\dfrac{\chi(e)}{|G|}\sum\limits_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\sigma),\forall\alpha\in\Gamma_{m,n}$.

其中 $G_\alpha=\{\sigma\in G\,|\,\alpha\sigma=\alpha\}$.

证 (a) 注意到$\{e^\otimes_\alpha|\alpha\in\Gamma_{m,n}\}$是$\overset{m}{\otimes}V$的规格化正交基就有

$$(e^*_\alpha,e^*_\beta)=(e^*_\alpha,\ e^\otimes_\beta)=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)(e^\otimes_{\alpha\sigma^{-1}},e^\otimes_\beta)$$
$$=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\delta_{\alpha\sigma^{-1},\beta}=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\delta_{\alpha,\beta\sigma}.$$

(b) 在上式取$\beta=\alpha$即得$\|e^*_\alpha\|^2=\dfrac{\chi(e)}{|G|}\sum\limits_{\sigma\in G}\chi(\sigma)$

$$\cdot\delta_{\alpha,\alpha\sigma}=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\sigma).\qquad\blacksquare$$

容易验证对于 $\alpha\in\Gamma_{m,n}$, $G_\alpha=\{\sigma\in G|\alpha\sigma=\alpha\}$ 是 G 的子群，称为 G 对 α 的**稳定子群**，它是由 G 中对 α 置换后不变的那些置换组成.

下面是张量对称类维数的一个计算公式.

定理3.6 如果 $\dim V=n$，则

$$\dim V_\chi(G)=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)n^{c(\sigma)}.$$

证 因为 $T(G,\chi)$是投影算子，由定理1.2及第一章定理8.1得

$$\dim V_\chi(G)=\rho(T(G,\chi))=\mathrm{tr}(T(G,\chi))$$

$$=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\mathrm{tr}(P(\sigma))$$

$$=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)n^{c(\sigma)}.\qquad\blacksquare$$

(本节主要定理 3.3 参看[25])

练　习　3

1．设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的规格化正交基，证明若 $\alpha\in Q_{m,n}$（严格增序列的集合），则 $\|e^*_\alpha\|^2=\frac{\chi(e)^2}{|G|}$.

2．设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的规格化正交基，$\alpha\in\Gamma_{m,n}$，$\tau\in G$. 证明$(e^*_\alpha,e^*_{\alpha\tau})=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\tau^{-1}\sigma)$.

3．假定 $m\leqslant n$，证明 $V_\chi(G)\neq\{0\}$.

4. 设χ是G的不可约特征标，$\alpha\in\Gamma_{m,n}$，证明

$$\frac{1}{|G_\alpha|}\sum_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\sigma)$$是非负整数.

（提示：考虑χ在G_α上的限制）

§4　张量对称类的基

上一节定理3.6给出了计算张量对称类维数的一个公式，我们已经看到仅从这个公式去计算$V_\chi(G)$的维数就不太简单，可以想象构造$V_\chi(G)$的基就更不是很简单的事情（一些特殊情形除外）. 为了构造$V_\chi(G)$的基，我们要分为两步：第一步把$V_\chi(G)$再分解为一些轨道子空间的直和；第二步构造各轨道子空间的基. 为此我们先对集合$\Gamma_{m,n}$进行分解.

对于$\alpha\in\Gamma_{m,n}$，集合$\Gamma_\alpha=\{\alpha\sigma|\sigma\in G\}$称为$\Gamma_{m,n}$中包含$\alpha$的$G$轨道或**轨道**. 故$\alpha,\beta$属于同一轨道当且仅当存在$\sigma\in G$使$\alpha=\beta\sigma$. 显然两个轨道或者重合或者不相交，因此$\Gamma_{m,n}$可分解为若干个不相交的轨道的并.

现在我们把每个轨道中按字典排列的第一名挑出来组成一个集合，叫做**轨道代表集**，记作Δ，于是有

$$\Gamma_{m,n}=\bigcup_{\alpha\in\Delta}\Gamma_\alpha.$$

Δ是个重要集合，它与m，n，G有关，它的元素（序列）数目等于轨道的数目，我们来看两个具体例子.

例如对于$\Gamma_{3,2}$，若$G=S_3$，则$\Gamma_{3,2}$分为不相交的4个轨道：

$\{(1,1,1)\}$;

$\{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}$;

$\{(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)\}$;

$\{(2,2,2)\}$.

这时，集合 Δ 由 4 个序列组成，即

$$\Delta=\{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,2),(2,2,2)\}.$$

同样的 $\Gamma_{3,2}$，若 G 由单位元和一个对换组成，例如 $G=\{e,(1\ 2)\}$，则 $\Gamma_{3,2}$ 就被分为 6 个轨道而 Δ 则由 6 个序列组成，即

$$\Delta=\{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2),(2,2,1),(2,2,2)\}.$$

以后我们用符号 $\alpha<\beta$ 表示序列 α 按字典次序严格地排在 β 之前，$\alpha\leqslant\beta$ 则表示 α 在 β 之前或相等，下面的结论是显然的.

定理4.1 设 Δ 是 $\Gamma_{m,n}$ 对于 G 的轨道代表集，$\alpha\in\Gamma_{m,n}$，则 $\alpha\in\Delta$ 的充要条件是 $\alpha\leqslant\alpha\sigma$，$\forall\sigma\in G$. ▎

由于集合Δ 中的序列在所在轨道中排在最前头，故 Δ 与不减的序列集合 $G_{m,n}$ 有着密切的关系.

定理4.2 设 Δ 是 $\Gamma_{m,n}$ 对于 G(S_m 的子群) 的轨道代表集，则有

(a) $G_{m,n}\subset\Delta$.

(b) 如果 $G=S_m$，那么 $\Delta=G_{m,n}$.

(c) 如果 $m\leqslant n$，$\Delta=G_{m,n}$，那么 $G=S_m$.

证 (a) 假如 $\alpha\in G_{m,n}$，那么 $\alpha\leqslant\alpha\sigma,\forall\sigma\in G$,故 $\alpha\in\Delta$.

(b) 若 $\alpha\in\Delta$，则存在 $\sigma\in S_m$ 使 $\alpha\sigma\in G_{m,n}\subset\Delta$,故 $\alpha=\alpha\sigma\in G_{m,n}$.

（c） 假定 $G\neq S_m$，则存在置换 $\tau\notin G$. 令 $\alpha=(1,\cdots,m)$，由 $m\leqslant n$ 知 $\alpha\in G_{m,n}$. 显然 $\alpha\tau$ 与 α 不属于同一轨道（否则就存在 $\sigma\in G$ 使 $\alpha\tau\sigma=\alpha$，因而 $\tau\sigma=e,\tau=\sigma^{-1}\in G$，矛盾），于是对任何 $\pi\in G$，$\alpha\tau\pi\neq\alpha$. 故 $\alpha\tau\pi\notin G_{m,n},\forall\pi\in G$. 因此 Δ 有一序列（包含 $\alpha\tau$ 的轨道的代表）不属于 $G_{m,n}$，这与 $\Delta=G_{m,n}$ 矛盾. ▮

下面是关于集合 Δ 的一个常用组合公式[12].

定理4.3 设 $\varphi:\Gamma_{m,n}\to W$（向量空间）是任意的映射，则

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_{m,n}}\varphi(\gamma)=\sum_{\alpha\in\Delta}\frac{1}{|G_\alpha|}\sum_{\sigma\in G}\varphi(\alpha\sigma).$$

证 因为 $\Gamma_{m,n}=\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta}\Gamma_\alpha$，若写 $\Gamma_\alpha=\{\alpha\tau_1,\cdots,\alpha\tau_k\}$，（$\tau_j$ 与 α 有关），就有

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_{m,n}}\varphi(\gamma)=\sum_{\alpha\in\Delta}\sum_{\gamma\in\Gamma_\alpha}\varphi(\gamma)=\sum_{\alpha\in\Delta}\sum_{j=1}^{k}\varphi(\alpha\tau_j)$$

$$=\sum_{\alpha\in\Delta}\frac{1}{|G_\alpha|}\sum_{\sigma\in G}\varphi(\alpha\sigma).$$

上面最后一个等号是因为 $\alpha\sigma$ 当 σ 跑遍 G 时每个 $\alpha\tau_j$ 都重复 $|G_\alpha|$ 次，而这个事实则由下面的等式表明.

$$|\{\sigma\in G|\alpha\sigma=\alpha\tau_j\}|=|\{\sigma\in G|\alpha\sigma\tau_j^{-1}=\alpha\}|$$
$$=|\{\pi\in G|\alpha\pi=\alpha\}|=|G_\alpha|,j=1,\cdots,k.$$ ▮

设 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的基，我们知道 $\{e_\gamma^\otimes|\gamma\in\Gamma_{m,n}\}$ 是 $\overset{m}{\otimes}V$ 的基. 由张量对称类及 Δ 的定义就有

$$V_\chi(G)=\langle e_\gamma^*|\gamma\in\Gamma_{m,n}\rangle=\sum_{\gamma\in\Gamma_{m,n}}\langle e_\gamma^*\rangle=\sum_{\alpha\in\Delta}\sum_{\sigma\in G}\langle e_{\alpha\sigma}^*\rangle$$

$$=\sum_{\alpha\in\Delta}\langle e^*_{\alpha\sigma}|\sigma\in G\rangle. \tag{1}$$

$\langle e^*_{\alpha\sigma}|\sigma\in G\rangle$ 称为**轨道子空间**. 我们先来看这些轨道子空间之间的关系.

定理4.4 设 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是内积空间 V 的规格化正交基，若 α,β 分属于不同的 G 轨道，则 $(e^*_\alpha,e^*_\beta)=0$. 若 α, β 属于同一个 G 轨道，则 $\|e^*_\alpha\|=\|e^*_\beta\|$.

证 定理的前一部分由定理3.5(a)表明，因为这时对任何 $\sigma\in G,\alpha\neq\beta\sigma$. 后一部分由定理3.5(b)我们只需证明对于 $\alpha=\beta\theta$, $(\theta\in G)$, 必有 $\sum_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\sigma)=\sum_{\tau\in G_\beta}\chi(\tau)$. 事实上若 $\alpha=\beta\theta$, 首先容易证明 G_α 与 G_β 是**共轭子群**，即 $G_\alpha=\theta^{-1}G_\beta\theta$ (练习4.2)，然后利用特征标在共轭类里取相同值就得

$$\sum_{\tau\in G_\beta}\chi(\tau)=\sum_{\tau\in G_\beta}\chi(\theta^{-1}\tau\theta)=\sum_{\sigma\in\theta^{-1}G_\beta\theta}\chi(\sigma)$$

$$=\sum_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\sigma).$$ ▮

此定理说明，对于 $\alpha\in\Gamma_{m,n}$, 若 $e^*_\alpha=0$, 则 $e^*_{\alpha\sigma}=0,\forall\sigma\in G$. 又由定理3.5知，$e^*_\alpha\neq0$ 的充要条件是 $\sum_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\sigma)\neq0$. 故若令

$$\overline{\Delta}=\{\alpha\in\Delta\,\Big|\,\sum_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\sigma)\neq0\}, \tag{2}$$

则有下面结论：

定理4.5 设 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 V 的基，则

$$V_\chi(G)=\sum_{\alpha\in\overline{\Delta}}\langle e^*_{\alpha\sigma}\mid\sigma\in G\rangle \tag{3}$$

且(3)为直和.

证 因为当 $\alpha\in\Delta$ 而 $\alpha\notin\overline{\Delta}$ 时，$e^*_\alpha=e^*_{\alpha\sigma}=0, \forall\sigma\in G$，故(1)式简化为(3)式. 在 V 上定义内积使 E 成为规格化正交基（第一章定理6.3)，据据上一定理，(3)的各轨道子空间就成为互相正交的，即(3)是正交和，因而(3)是直和. ∎

(2)式定义的 $\overline{\Delta}$ 又是个重要集合，它除了与 m,n,G 有关外还与特征标 χ 有关（注意 $\overline{\Delta}$ 与 V 的基如何选取无关）. 为了了解 $\overline{\Delta}$ 中序列的构造情况，我们来证明一个与定理 4.2 有点相似的结论.

定理4.6 设 $\overline{\Delta}$ 的定义如(2)，则有

(a) $Q_{m,n}\subset\overline{\Delta}$.

(b) 如果 $G=S_m$ 且 $\chi=\varepsilon$，那么 $\overline{\Delta}=Q_{m,n}$.

(c) 如果 $1<m\leqslant n$，$\overline{\Delta}=Q_{m,n}$，那么 $G=S_m$ 且 $\chi=\varepsilon$.

证 (a) 因为 $Q_{m,n}\subset G_{m,n}\subset\Delta$，若 $\alpha\in Q_{m,n}$，则 $G_\alpha=\{e\}$，故 $\alpha\in\overline{\Delta}$.

(b) 由 $G=S_m$，所以 $G_{m,n}=\Delta$. 假定 $\gamma\in\Delta$ 但 $\gamma\notin Q_{m,n}$，则有 $i\neq j$ 而 $\gamma(i)=\gamma(j)$. 定义对换 $\tau=(i\ \ j)$，则 $\tau\in G_\gamma$. 注意到

$\varepsilon(\tau)=-1$，就有 $\sum\limits_{\sigma\in G_\gamma}\varepsilon(\sigma)=\sum\limits_{\sigma\in G_\gamma}\varepsilon(\tau\sigma)=-\sum\limits_{\sigma\in G_\gamma}\varepsilon(\sigma)$，

故 $\sum\limits_{\sigma\in G_\gamma}\varepsilon(\sigma)=0$，即 $\gamma\notin\overline{\Delta}$. 这就表明 $\overline{\Delta}=Q_{m,n}$. (用(a))

(c) 由 $1<m\leqslant n$ 知 $\alpha=(1,\cdots,i-1,i,i,i+2,\cdots,m)\in G_{m,n}\subset\Delta$，但 $\alpha\notin\overline{\Delta}$ (因为 $\overline{\Delta}=Q_{m,n}$)，故 $\sum\limits_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\sigma)=0$. 因为若

对换$(i\ \ i+1)\notin G$会造成$G_\alpha=\{e\}$与$\sum_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\sigma)=0$矛盾，故对换$(i\ \ i+1)\in G, i=1,\cdots,m-1$.这就证明了$G=S_m$. 又由$\tau=(i\ \ i+1)\in G, G_\alpha=\{e,\tau\}$及$\sum_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\sigma)=0$，就有$\chi(e)+\chi(\tau)=0$.记$k=\chi(e)$并设提供特征标$\chi$的$k$阶酉矩阵表示为$A$,则由$\chi(\tau)=\mathrm{tr}(A(\tau))=-k$,可得$A(\tau)=-I_k$(练习4.1).现在对于任意$\sigma\in G$,由$\sigma$可写为形如$(i\ \ i+1)$的对换的乘积即$\sigma=\tau_1\cdots\tau_r$就有$A(\sigma)=A(\tau_1\cdots\tau_r)=A(\tau_1)\cdots A(\tau_r)=(-1)^r I_k$，于是$\chi(\sigma)=\mathrm{tr}(A(\sigma))=(-1)^r k=\varepsilon(\tau_1)\cdots\varepsilon(\tau_r)k=k\varepsilon(\sigma), \forall\sigma\in G$.最后由$\chi$不可约即得$\chi=\varepsilon$. ▎

通常还引进一个序列集合

$$\Omega=\{\alpha\in\Gamma_{m,n}\ \Big|\ \sum_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\sigma)\neq 0\}.$$

这样又可以说$e_\alpha^*\neq 0$的充要条件是$\alpha\in\Omega$. 集合Ω与$\overline{\Delta}$的关系为$\Omega=\{\alpha\sigma\mid\alpha\in\overline{\Delta},\sigma\in G\}=\bigcup_{\alpha\in\overline{\Delta}}\Gamma_\alpha$,也有$\overline{\Delta}=\Delta\cap\Omega$.

前面我们已经把$V_\chi(G)$分解为轨道子空间的直和((3)式). 故只要找出各轨道子空间的基就构成了$V_\chi(G)$的基. 为此我们先证明关于轨道子空间维数的结论，对于$\alpha\in\Gamma_{m,n}$,记

$$s_\alpha=\dim\langle e_{\alpha\sigma}^*\mid\sigma\in G\rangle.$$

定理4.7(Freese)　对于$\alpha\in\Gamma_{m,n}$，有

$$s_\alpha=\frac{\chi(e)}{|G_\alpha|}\sum_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\sigma).$$

证　我们知道G_α是G的子群，对于$\tau\in G$,集合$G_\alpha\tau=$

$\{\sigma\tau \mid \sigma\in G_a\}$称为 G_a 的右陪集. 容易看到 G_a 的两个右陪集或者重合或者不相交，故存在 $\tau_1,\cdots,\tau_k$，使 G 分为 k 个不相交的右陪集 $G_a\tau_1,\cdots,G_a\tau_k$，且 $k|G_a|=|G|$. 显然轨道$\Gamma_a=\{a\tau_1,\cdots,a\tau_k\}$. 故若令 $W_a=\langle e^{\otimes}_{a\sigma} \mid \sigma\in G\rangle$,则 $E_a=\{e^{\otimes}_{a\tau_1},\cdots,e^{\otimes}_{a\tau_k}\}$就是 W_a 的基.

因为 W_a 显然是 $P(\sigma)$因而是 $T(G,\chi)$ 的不变子空间，故 $T(G,\chi)$ 在 W_a 上的限制 $T_a(G,\chi)=T(G,\chi)|_{W_a}$ 是 W_a 上的线性算子而且显然是投影算子（第一章练习8.8).

现在若令$[T_a(G,\chi)]_{E_a}^{E_a}=C=(c_{ij})\in M_k$,则由

$$
\begin{aligned}
T_a(G,\chi)(W_a)&=T(G,\chi)(\langle e^{\otimes}_{a\sigma} \mid \sigma\in G\rangle)\\
&=\langle e^{*}_{a\sigma} \mid \sigma\in G\rangle,
\end{aligned}
$$

就知 $s_a=\dim\langle e^{*}_{a\sigma} \mid \sigma\in G\rangle=\rho(T_a(G,\chi))=\mathrm{tr}(T_a(G,\chi))=\mathrm{tr}(C)=\rho(C)$.

下面计算矩阵 $C=(c_{ij})$.因为

$$
\begin{aligned}
T_a(G,\chi)e^{\otimes}_{a\tau_j}=e^{*}_{a\tau_j}&=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)e^{\otimes}_{a\tau_j\sigma^{-1}}\\
&=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\pi\in G}\chi(\pi^{-1}\tau_j)e^{\otimes}_{a\pi}\\
&=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{i=1}^{k}\sum_{\pi\in G_a\tau_i}\chi(\pi^{-1}\tau_j)e^{\otimes}_{a\pi}\\
&=\sum_{i=1}^{k}\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\theta\in G_a}\chi(\tau_i^{-1}\theta^{-1}\tau_j)e^{\otimes}_{a\tau_i},\\
&\qquad j=1,\cdots,k.
\end{aligned}
$$

由矩阵表示的定义就有

$$c_{ij}=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\tau_i^{-1}\sigma\tau_j).$$

于是 $s_\alpha=\mathrm{tr}(C)=\sum_{i=1}^{h}c_{ii}=\sum_{i=1}^{h}\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\sigma)=\frac{\chi(e)}{|G_\alpha|}$

$\sum_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\sigma)$.

设 $\alpha\in\overline{\Delta}$，由 $e^*_{\alpha\tau_j}=\sum_{i=1}^{h}c_{ij}e^*_{\alpha\tau_i}$ 及 $\rho(C)=s_\alpha$，便可找到矩阵 C 的 s_α 个线性无关的列（例如可通过对 C 的行进行初等变换而找到），假定它们是 $j_1,\cdots,j_{s_\alpha}$ 列，并记 $\alpha\tau_{j_1}=\alpha_1,\cdots,\alpha\tau_{j_{s_\alpha}}=\alpha_{s_\alpha}$，则 $\{e^*_{\alpha_1},\cdots,e^*_{\alpha_{s_\alpha}}\}$ 显然就是轨道子空间 $\langle e^*_{\alpha\sigma}|\sigma\in G\rangle$ 的基．为了后面推导方便，通常取 $\alpha_1=\alpha$（总可办到）．

现在假定 $\overline{\Delta}$ 按字典次序排列为 $\overline{\Delta}=\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots\}$，对 β,γ 等也象上面那样找到各轨道子空间的基，于是我们就得到有序集合（不一定字典次序）

$$\hat{\Delta}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{s_\alpha};\beta_1,\cdots,\beta_{s_\beta};\gamma_1,\cdots,\gamma_{s_\gamma};\cdots\}$$

因而也就找到了 $V_\chi(G)$ 的基 $\{e^*_\omega|\omega\in\hat{\Delta}\}$．

注意，按上面的规定有 $\overline{\Delta}\subset\hat{\Delta}$．又我们将 $\hat{\Delta}$ 的元素的上述排列次序称之为**轨道次序**（这在后面要用到）．

从集合 $\hat{\Delta}$ 的构造过程，可以看到集合 $\hat{\Delta}$ 一般不是唯一的，但因为 Δ、$\overline{\Delta}$ 和矩阵 C 都不依赖于 V 的基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，故 $\hat{\Delta}$ 也是与 V 的基无关的，因此若 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 是 V 的另一组基，则 $\{v^*_\omega|\omega\in\hat{\Delta}\}$ 仍是 $V_\chi(G)$ 的基．

下面我们看一个构造 $\hat{\Delta}$ 的具体例子．

设 $m=n=3$，$G=S_3=\{e,\ (2\ 3),(1\ 2),(1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2),\ (1\ 3)\}$，$\chi$ 取为 S_3 的 2 阶不可约特征标，即 $\chi(e)=2$，$\chi(2\ 3)=\chi(1\ 2)=\chi(1\ 3)=0$，$\chi(1\ 2\ 3)=\chi(1\ 3\ 2)=-1$.（看附录）

$\Gamma_{3,3}$ 对于 $G=S_3$ 的轨道为：

$\{(1,1,1)\}$；

$\{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}$；

$\{(1,1,3)(1,3,1),(3,1,1)\}$；

$\{(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)\}$；

$\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),\ (3,1,2),\ (3,2,1)\}$；

$\{(1,3,3),(3,1,3),(3,3,1)\}$；

$\{(2,2,2)\}$；

$\{(2,2,3),(2,3,2),(3,2,2)\}$；

$\{(2,3,3),(3,2,3),(3,3,2)\}$；

$\{(3,3,3)\}$.

容易看出 $\overline{\Delta}=\{(1,1,2),\ (1,1,3),\ (1,2,2),\ (1,2,3),\ (1,3,3),(2,2,3),(2,3,3)\}$.

对于 $\alpha=(1,1,2)$，有 $G_\alpha=\{e,(1\ 2)\}$，$s_\alpha=\dfrac{\chi(e)}{|G_\alpha|}\sum\limits_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\sigma)=\chi(e)=2$，$\Gamma_\alpha=\{(1,1,2),\ (1,2,1),\ (2,1,1)\}=\{\alpha\tau_1,\alpha\tau_2,\alpha\tau_3\}$，其中 $\tau_1=e$，$\tau_2=(2\ 3)$，$\tau_3=(1\ 3)$.

由 $c_{ij}=\dfrac{\chi(e)}{|G|}\sum\limits_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\tau_i^{-1}\sigma\tau_j)=\dfrac{1}{3}\ (\chi(\tau_i^{-1}\tau_j)+\chi(\tau_i^{-1}(1\ 2)\tau_j))$，可算得

$$C=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

显然C的任意两列都线性无关，故可取 $\alpha_1=\alpha=(1,1,2)$，$\alpha_2=(1,2,1)$.

不难发现其它由 3 个序列组成的轨道算法都类似.

现在再算包含 $\omega=(1,2,3)$ 的轨道，这时 $G_\omega=\{e\}$，$s_\omega=\frac{\chi(e)}{|G_\omega|}\sum_{\sigma\in G_\omega}\chi(\sigma)=2\chi(e)=4$，$\Gamma_\omega=\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}=\{\omega\tau_1,\cdots,\omega\tau_6\}$，其中 $\tau_1=e$，$\tau_2=(2\ 3)$，$\tau_3=(1\ 2)$，$\tau_4=(1\ 2\ 3)$，$\tau_5=(1\ 3\ 2)$，$\tau_6=(1\ 3)$.

由 $c_{ij}=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G_\omega}\chi(\tau_i^{-1}\sigma\tau_j)=\frac{1}{3}\chi(\tau_i^{-1}\tau_j)$，故有

$$C=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

注意这时不是 C 的任意 4 个列都线性无关（例如1,2,3,6 列或 1,2,4,5 列都线性相关），但容易看出 1,2,3,4 列或 1,2,3,5 列都是线性无关的. 故可取 $\omega_1=\omega=(1,2,3)$, $\omega_2=(1,3,2)$, $\omega_3=(2,1,3)$, $\omega_4=(2,3,1)$.

这样我们就找到了一个 $\bar{\Delta}=\{(1,1,2),(1,2,1);(1,1,3),(1,3,1);(1,2,2),(2,1,2);(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1);(1,3,3,),(3,1,3);(2,2,3),(2,3,2);(2,3,3),(3,2,3)\}$.

关于 $V_\chi(G)$的维数$|\bar{\Delta}|$，我们已经在定理 3.6 中证明过 $|\bar{\Delta}|=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)n^{c(\sigma)}$，现在利用 s_α 的计算公式又可得到$|\bar{\Delta}|$的另一种计算公式.

定理4.8 $\dim V_\chi(G)=|\bar{\Delta}|=\sum_{\alpha\in\bar{\Delta}} s_\alpha$

$$=\chi(e)\sum_{\alpha\in\Delta}\frac{1}{|G_\alpha|}\sum_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\sigma)$$

$$=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\alpha\in\Gamma_{m,n}}\sum_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\sigma).$$

证 只需证明最后一个等号. 注意定理 4.3 和定理 4.4 的证明过程就有

$$\sum_{\alpha\in\Gamma_{m,n}}\sum_{\pi\in G_\alpha}\chi(\pi)=\sum_{\alpha\in\Delta}\frac{1}{|G_\alpha|}\sum_{\sigma\in G}\sum_{\pi\in G_{\alpha\sigma}}\chi(\pi)$$

$$=\sum_{\alpha\in\Delta}\frac{1}{|G_\alpha|}\sum_{\sigma\in G}\sum_{\pi\in G_\alpha}\chi(\pi)$$

$$=|G|\sum_{\alpha\in\Delta}\frac{1}{|G_\alpha|}\sum_{\pi\in G_\alpha}\chi(\pi).$$

（本节主要定理 4.7 可参看[5]或[7]）

练　习　4

1. 设 $U\in M_n$ 是酉矩阵且 $\mathrm{tr}(U)=-n$，证明 $U=-I_n$.

2. 设 $\theta\in G$（S_m 的子群），$\beta\in\Gamma_{m,n}$，$\alpha=\beta\theta$，证明 $G_\alpha=\theta^{-1}G_\beta\theta$.

3. 证明 $\sum\limits_{\alpha\in\Delta}\dfrac{|G|}{|G_\alpha|}=|\Gamma_{m,n}|$，$|\Delta|=\sum\limits_{\alpha\in\Gamma_{m,n}}\dfrac{|G_\alpha|}{|G|}$.

4. 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的基，证明 $\{e_\alpha^*\mid\alpha\in\bar{\Delta}\}$ 线性无关.

5. 记 $s_\alpha(\chi)=\dfrac{\chi(e)}{|G_\alpha|}\sum\limits_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\sigma)$，其中 χ 是 G 的不可约特征标，$\alpha\in\Gamma_{m,n}$，证明

（i） $s_\alpha(\chi)$ 是 $\chi(e)$ 的非负整数倍.

（ii） $\sum\limits_{\chi\in I(G)}s_\alpha(\chi)=\dfrac{|G|}{|G_\alpha|}$.

（iii） 除非 $G_\alpha=G$ 与 $\chi\equiv1$ 同时满足，否则有 $s_\alpha(\chi)<\dfrac{|G|}{|G_\alpha|}$.

（iv） 对于 $\tau\in S_n$，$\pi\in G$，有 $s_{\tau\alpha\pi}(\chi)=s_\alpha(\chi)$.（这里 $\tau\alpha=(\tau(\alpha(1)),\cdots,\tau(\alpha(m)))\in\Gamma_{m,n}$）

（v） 若 $\alpha\in\Omega$，那么有 $\chi(e)\leqslant s_\alpha(\chi)\leqslant\chi(e)^2$.

（提示：附录练习4.1）

6. 证明 $\bar{\Delta}=\hat{\Delta}\iff\chi(e)=1$.

7. 证明 $\Delta=\bar{\Delta}$（或 $\Delta=\hat{\Delta}$）$\iff\chi\equiv1$.

8. 证明若 $\chi(e)=1, \alpha\in\Omega$，则对任意 $\sigma\in G_\alpha$ 有 $\chi(\sigma)=1$（即 $\chi|_{G_\alpha}\equiv 1$）.

9. 证明恒等式 $\binom{n}{m}=\frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m}\varepsilon(\sigma)n^{c(\sigma)}$，$\binom{n+m-1}{m}=\frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m}n^{c(\sigma)}$.

10. 假定 $V_\chi(G)\neq\{0\}$，证明若 $G\neq S_m$ 或 $\chi\neq\varepsilon$，则 $\overline{\Delta}$ 一定包含有至少有两个分量相同的序列.

11. 设矩阵 $C\in M_k$ 如定理4.7中所定义，即 $c_{ij}=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\tau_i^{-1}\sigma\tau_j)$，直接证明 $C^2=C$.

§5 张量对称类上的线性算子

因为 $V_\chi(G)$ 是张量空间 $\overset{m}{\otimes}V$ 的子空间，故 $V_\chi(G)$ 上的线性算子可看作是 $\overset{m}{\otimes}V$ 上某线性算子在 $V_\chi(G)$ 上的限制．注意到这种关系对于讨论 $V_\chi(G)$ 上线性算子的性质有时是方便的．

设 $T\in L(V,V)$，则 $\varphi(v_1,\cdots,v_m)=Tv_1*\cdots*Tv_m$ 定义了一个关于 G 和 χ 对称的多重线性映射．由对称因子化性质（定理 2.3），知存在唯一的线性算子记作 $K(T)\in L(V_\chi(G),V_\chi(G))$ 使

$$K(T)v^*=Tv_1*\cdots*Tv_m.$$

$K(T)$ 称为 T 在 $V_\chi(G)$ 上的**诱导算子**．注意 $K(T)$ 与 $m,n,$

G,χ 有关. 下面是诱导算子 $K(T)$ 的一些性质.

定理5.1 设 $T\in L(V,V)$, 则 $V_\chi(G)$ 是 $\overset{m}{\otimes}T$ 的不变子空间且 $K(T)=\overset{m}{\otimes}T|_{V_\chi(G)}$, 因而 $K(T)v^*=(\overset{m}{\otimes}T)v^*$, $\forall v^*\in V_\chi(G)$.

证 对于 $\sigma\in S_m$, 容易证明（练习5.1）$(\overset{m}{\otimes}T)P(\sigma)=P(\sigma)(\overset{m}{\otimes}T)$, 因而 $(\overset{m}{\otimes}T)T(G,\chi)=T(G,\chi)(\overset{m}{\otimes}T)$, 故 $V_\chi(G)$ 是 $\overset{m}{\otimes}T$ 的不变子空间(第一章练习7.4), 于是 $\overset{m}{\otimes}T$ 在 $V_\chi(G)$ 上的限制唯一决定了 $V_\chi(G)$ 上的一个线性算子, 而它就是 $K(T)$, 这是因为

$$\begin{aligned}K(T)v^*&=Tv_1*\cdots*Tv_m=T(G,\chi)Tv_1\otimes\cdots\otimes Tv_m\\&=T(G,\chi)(\overset{m}{\otimes}T)v^{\otimes}=(\overset{m}{\otimes}T)T(G,\chi)v^{\otimes}\\&=(\overset{m}{\otimes}T)v^*,\end{aligned}$$

再由可合元素 v^* 生成 $V_\chi(G)$, 即得 $K(T)=\overset{m}{\otimes}T|_{V_\chi(G)}$. ▌

定理5.2 设 $S,T\in L(V,V)$, 则

(a) $K(I_V)=I_{V_\chi(G)}$.

(b) $K(ST)=K(S)K(T)$.

(c) $\rho(K(T))=|\hat{\Delta}\cap\Gamma_{m,r}|$, 其中 $r=\rho(T)$.

证 (a) 显然.

(b) 因为 $\overset{m}{\otimes}(ST)=\overset{m}{\otimes}S\overset{m}{\otimes}T$, 故有（第一章练习7.3）

$$\begin{aligned}K(ST)&=\overset{m}{\otimes}(ST)|_{V_\chi(G)}=(\overset{m}{\otimes}S|_{V_\chi(G)})(\overset{m}{\otimes}T|_{V_\chi(G)})\\&=K(S)K(T).\end{aligned}$$

(c) 由 $r=\rho(T)$ 知存在 V 的基 $v_1,\cdots,v_r,v_{r+1},\cdots,v_n$ 使得 $Tv_1,\cdots,Tv_r$ 线性无关, 而 $Tv_{r+1}=\cdots=Tv_n=0$（第一章定

理 1.3). 令 $e_i=Tv_i, i=1,\cdots,r$ 并扩充它们成为 V 的基 e_1, $\cdots, e_n$. 由上一节知$\{e_\alpha^* | \alpha\in \bar{\Delta}\}$, $\{v_\alpha^* | \alpha\in \bar{\Delta}\}$ 都是 $V_\chi(G)$的基.

现在当 $\alpha\in\Gamma_{m,r}$ 时, $K(T)v_\alpha^*=Tv_{\alpha(1)}*\cdots*Tv_{\alpha(m)}=e_\alpha^*$, 故$\{K(T)v_\alpha^*=e_\alpha^* | \alpha\in\bar{\Delta}\cap\Gamma_{m,r}\}$是 $V_\chi(G)$的基的一部分因而是线性无关集. 又当 $\alpha\in\bar{\Delta}$ 但 $\alpha\notin\bar{\Delta}\cap\Gamma_{m,r}$ 时, 则必存在某 i 使 $\alpha(i)>r$, 这时 $Tv_{\alpha(i)}=0$ 因之 $K(T)v_\alpha^*=0$. 再用第一章定理 1.3 即得 $\rho(K(T))=|\bar{\Delta}\cap\Gamma_{m,r}|$. ▎

定理5.3 设 V 是内积空间, $V_\chi(G)$ 上定义了相应的诱导内积, $T\in L(V,V)$, 则

(a) $K(T)^*=K(T^*)$.

(b) 若 T 分别是规范的, 厄米特的, 正定的, 非负定的, 酉的, 则 $K(T)$也具有相应性质.

证(a) 由定理5.1 知 $V_\chi(G)$是$\overset{m}{\otimes}T$ 与$\overset{m}{\otimes}T^*$ 的不变子空间, 故用第一章定理 7.2(a) 即得

$$K(T^*)=\overset{m}{\otimes}T^*|_{V_\chi(G)}=(\overset{m}{\otimes}T)^*|_{V_\chi(G)}=(\overset{m}{\otimes}T|_{V_\chi(G)})^*$$
$$=K(T)^*.$$

(b) 因为当 T 分别是规范的, 厄米特的, 正定的, 非负定的, 酉的, 则$\overset{m}{\otimes}T$ 也具有相应性质 (第三章定理 6.4), 故关于 $K(T)$的结论用第一章定理 7.2(b)即得. ▎

定理5.4 设 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$是 $T\in L(V,V)$的上三角基 (即$[T]_E^E$ 是上三角矩阵), 则 $E_*=\{e_\alpha^* | \alpha\in\bar{\Delta}\}$ (按上一节说的轨道次序排列)也是 $K(T)$的上三角基. (即$[K(T)]_{E_*}^{E_*}$是上三角矩阵)

证 由$[T]_E^E$ 是上三角矩阵就有

$$Te_j=\lambda_j e_j+\sum_{i<j} a_{ij}e_i.$$

其中 λ_j 是 T 的特征值.

对于 $\beta\in\hat{\triangle}$，由定义必存在 $\pi\in G$，使 $\beta\pi=\beta_1\in\overline{\triangle}$. 于是

$$\begin{aligned}K(T)e_\beta^* &= Te_{\beta(1)}*\cdots*Te_{\beta(m)}\\ &=\left(\lambda_{\beta(1)}e_{\beta(1)}+\sum_{i<\beta(1)}a_{i\beta(1)}e_i\right)*\cdots*\\ &\quad\cdot\left(\lambda_{\beta(m)}e_{\beta(m)}+\sum_{i<\beta(m)}a_{i\beta(m)}e_i\right)\\ &=\left(\prod_{t=1}^m\lambda_{\beta(t)}\right)e_\beta^*+\sum c_\alpha e_\alpha^*.\end{aligned}$$

显然上式最后求和部分的每个 α 都成立 $\alpha(i)\leqslant\beta(i)$，$i=1,\cdots,m$,且至少有一个 i 是不等号，即$\alpha<\beta$.

现在若某个 $e_\alpha^*\neq0$，则存在 $\theta\in G$,使 $\alpha\theta=\alpha_1\in\overline{\triangle}$，于是有 $\alpha_1\leqslant\alpha\pi<\beta\pi=\beta_1$,即按字典次序 α_1 严格地在 β_1 之前. 因此若 $\alpha\in\hat{\triangle}$,则按轨道次序的定义,α 就严格地排在 β 之前;又若 $\alpha\notin\hat{\triangle}$，则 e_α^* 可表示为该轨道的 e_γ^* 的线性组合，其中 $\gamma\in\{\alpha\sigma|\sigma\in G\}\cap\hat{\triangle}$，类似地可证每个 γ 按轨道次序严格地排在 β 之前，这就证明了 $E_*=\{e_\alpha^*|\alpha\in\hat{\triangle}\}$是 $K(T)$的上三角基. ∎

因为在复向量空间里，算子 $T\in L(V,V)$ 的上三角基总是存在的，故上定理也求出了 $K(T)$的全部特征值. 即

定理5.5 设 $T\in L(V,V)$的全部特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则 $K(T)$ 的全部特征值为 $\prod_{t=1}^m\lambda_{\omega(t)}$，$\omega\in\hat{\triangle}$. ∎

为了便于求得 $K(T)$ 的行列式公式，我们把 $\prod_{t=1}^{m}\lambda_{\omega(t)}$ 改写为 $\prod_{t=1}^{n}\lambda_t^{m_t(\omega)}$，其中 $m_t(\omega)$ 表示 t 在 ω 的分量中出现的次数. 显然对于一切 $\omega\in\Gamma_{m,n}$ 都有 $\prod_{t=1}^{m}\lambda_{\omega(t)}=\prod_{t=1}^{n}\lambda_t^{m_t(\omega)}$.

定理5.6 设 $T\in L(V,V)$，$K(T)$ 是 T 在 $V_\chi(G)$ 上的诱导算子，则

$$\det K(T)=(\det T)^{\frac{m}{n}|\hat{\Delta}|},$$

其中 $|\hat{\Delta}|=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in S_m}\chi(\sigma)n^{c(\sigma)}$.

证 由定理5.5，我们有

$$\det K(T)=\prod_{\omega\in\hat{\Delta}}\prod_{t=1}^{n}\lambda_t^{m_t(\omega)}=\prod_{t=1}^{n}\lambda_t^{q_t}, \qquad (1)$$

其中 $q_t=\sum_{\omega\in\hat{\Delta}}m_t(\omega)$.

下面我们证明 q_t 与 t 无关，即从1到 n 的任意正整数在 $\hat{\Delta}$ 的全部序列中出现的总次数都相同. 首先由练习4.2和4.5可以看到，对于 $\alpha\in\Gamma_{m,n}$，$\sigma\in G$ 有 $|G_{\alpha\sigma}|=|G_\alpha|$，$s_{\alpha\sigma}=s_\alpha$，也有 $m_t(\alpha\sigma)=m_t(\alpha)$. 又对于 $\tau\in S_n$，则有 $G_{\tau\alpha}=G_\alpha$，$s_{\tau\alpha}=s_\alpha$，$m_t(\tau\alpha)=m_{\tau^{-1}(t)}(\alpha)$，还有当 α 跑遍 $\Gamma_{m,n}$ 时，$\tau\alpha$ 显然也跑遍 $\Gamma_{m,n}$. 利用这些及定理4.3我们就得

$$q_t=\sum_{\omega\in\hat{\Delta}}m_t(\omega)=\sum_{\alpha\in\hat{\Delta}}s_\alpha m_t(\alpha)$$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{\alpha\in\Delta}\frac{1}{|G_\alpha|}\sum_{\sigma\in G}|G_{\alpha\sigma}|s_{\alpha\sigma}m_t(\alpha\sigma)$$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{\gamma\in\Gamma_{m,n}}|G_\gamma|s_\gamma m_t(\gamma)$$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{\alpha\in\Gamma_{m,n}}|G_{\tau\alpha}|s_{\tau\alpha}m_t(\tau\alpha)$$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{\alpha\in\Gamma_{m,n}}|G_\alpha|s_\alpha m_{\tau^{-1}(t)}(\alpha)=q_{\tau^{-1}(t)}$$

由 $\tau\in S_n$ 是任意的，即得 q_t 与 t 无关．于是注意到 $\sum_{t=1}^{n}m_t(\omega)=m$ 就有

$$nq_t=\sum_{t=1}^{n}q_t=\sum_{\omega\in\hat{\Delta}}\sum_{t=1}^{n}m_t(\omega)=m|\hat{\Delta}|.$$

即 $q_t=\frac{m}{n}|\hat{\Delta}|=\frac{m}{n|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)n^{c(\sigma)}$．代入（1）式即得

$$\det K(T)=\sum_{t=1}^{n}\lambda_t^{\frac{m}{n}|\hat{\Delta}|}=\left(\prod_{t=1}^{n}\lambda_t\right)^{\frac{m}{n}|\hat{\Delta}|}$$

$$=(\det T)^{\frac{m}{n}|\hat{\Delta}|}$$ ▮

关于诱导算子$K(T)$还有如下的有用结论．

定理5.7 设 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是内积空间 V 的规格化正交基，$V_\chi(G)$ 上定义了相应的诱导内积．又 $T\in L(V,V)$，$[T]_E^E=A=(a_{ij})$，则对于 $\alpha,\beta\in\Gamma_{m,n}$ 有

$$(K(T)e_\beta^*,e_\alpha^*)=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\prod_{t=1}^{m}a_{\alpha\sigma(t)\beta(t)}.\quad(2)$$

证 注意到 $K(T)e_\beta^* = Te_{\beta(1)} * \cdots * Te_{\beta(m)}$ 及 E 是规格化正交基就有 $(Te_{\beta(t)}, e_{\alpha\sigma(t)}) = a_{\alpha\sigma(t)\beta(t)}$. 令 $v_t = Te_{\beta(t)}$, $u_t = e_{\alpha(t)}$, 代入定理 3.4 即得. ▌

现在我们来讨论 $K(T)$ 的矩阵表示问题. 从 $V_\chi(G)$ 的基 $\{e_\alpha^* | \alpha \in \hat{\Delta}\}$ 的构造知道, 当 V 是内积空间时, 不同轨道的元素是正交的, 但同一轨道的元素不一定正交, 因此(2)式的右边一般并不是 $K(T)$ 关于基 $\{e_\alpha^* | \alpha \in \hat{\Delta}\}$ 的矩阵表示的元素. 但当 $\chi(e)=1$ 时, $E_* = \{e_\alpha^* | \alpha \in \bar{\Delta}\}$ 是 $V_\chi(G)$ 的正交基, 特别地, $E_*' = \left\{\sqrt{\frac{|G|}{|G_\alpha|}}\, e_\alpha^* \,\middle|\, \alpha \in \bar{\Delta}\right\}$ 是规格化正交基(练习5.6). 故当 $\chi(e)=1$ 时, $K(T)$ 关于基 E_*' 的矩阵表示的元素很容易求得.

定理5.8 设 $\chi(e)=1, E=\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 的有序基, $V_\chi(G)$ 的基 $E_*' = \left\{\sqrt{\frac{|G|}{|G_\alpha|}}\, e_\alpha^* \,\middle|\, \alpha \in \bar{\Delta}\right\}$ 按字典次序排列, 又 $T \in L(V,V)$ 且 $[T]_E^E = A$, 则

$$[K(T)]_{E_*'}^{E_*'} = \left(\frac{1}{\sqrt{|G_\alpha||G_\beta|}} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \cdot \prod_{t=1}^{m} a_{\alpha\sigma(t)\beta(t)}\right)_{\substack{\alpha \in \bar{\Delta} \\ \beta \in \bar{\Delta}}}. \qquad (3)$$

证 在 V 上定义内积使 E 成为规格化正交基. 这时 E_*' 关于诱导内积就成为 $V_\chi(G)$ 的规格化正交基. 利用(2)式(这时 $\chi(e)=1$)即得

$$\left(K(T)\sqrt{\frac{|G|}{|G_\beta|}}e_\beta^*, \sqrt{\frac{|G|}{|G_\alpha|}}e_\alpha^*\right) = \frac{1}{\sqrt{|G_\alpha||G_\beta|}} \cdot \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \prod_{t=1}^{m} a_{\alpha\sigma(t)\beta(t)}.$$ ▌

读者也可以不通过定义内积而应用定理 4.3 来直接证明该定理.

与第三章定义矩阵的 Kronecker 乘积类似，我们现在来定义诱导矩阵.

设 $\chi(e)=1$，集合 $\overline{\Delta}$ 不空并按字典次序排列，对于 $A=(a_{ij})\in M_n$，A 关于 G 和 χ 的诱导矩阵 $K(A)\in M_{|\overline{\Delta}|}$ 定义为：

$$K(A)_{\alpha,\beta}=\frac{1}{\sqrt{|G_\alpha||G_\beta|}}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\prod_{t=1}^{m}a_{\alpha\sigma(t)\beta(t)},$$

$$\alpha,\beta\in\overline{\Delta}. \qquad (4)$$

这样若 E 和 E'_* 的定义如定理 5.8 且 $[T]_E^E=A$，则有

$$[K(T)]_{E'_*}^{E'_*}=K(A).$$

因为诱导矩阵 $K(A)$ 可看作是 $K(T)$ 的矩阵表示（当 V 是内积空间时还可看作是在规格化正交基下的矩阵表示），故诱导矩阵 $K(A)$ 具有诱导算子 $K(T)$ 的一系列类似性质. 集中起来可写为下面的结论.

定理5.9 设 $K(A)$ 为 $A\in M_n$ 的关于 G（S_m 的子群）和 χ（$\chi(e)=1$）的诱导矩阵，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的全部特征值，则

(a) $K(I_n)=I_{|\overline{\Delta}|}$，其中 $|\overline{\Delta}|=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)n^{c(\sigma)}$.

(b) $K(AB)=K(A)K(B)$，$A,B\in M_n$.

(c) 如果 A 可逆，那么 $K(A^{-1})=K(A)^{-1}$.（练习 5.2）.

(d) $\rho(K(A))=|\overline{\Delta}\cap\Gamma_{m,r}|$，其中 $r=\rho(A)$.

(e) 如果 A 是上三角矩阵，那么 $K(A)$ 也是.

(f) $K(A)$ 的全部特征值为 $\prod_{t=1}^{m}\lambda_{\alpha(t)}$, $\alpha\in\bar{\Delta}$

(g) $$\mathrm{tr}(K(A)) = \sum_{\alpha\in\bar{\Delta}}\prod_{t=1}^{m}\lambda_{\alpha(t)}$$

$$=\sum_{\alpha\in\bar{\Delta}}\frac{1}{|G_\alpha|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\prod_{t=1}^{m}a_{\alpha\sigma(t)\alpha(t)}.$$

(h) $\det K(A)=(\det A)^{\frac{m}{n}|\bar{\Delta}|}$.

(i) $K(A^*)=K(A)^*$.

(j) 如果 A 分别是规范的，厄米特的，正定的，非负定的，酉的，那么 $K(A)$ 也相应是. ▌

(对于 $\chi(e)>1$ 的情形，如何构造 $V_\chi(G)$ 的规格化正交基，如何写出 $K(T)$ 的矩阵表示的元素以及如何定义相应的诱导矩阵 $K(A)$ 等，读者可看文献[28]，另外定理5.4参看[30]，定理 5.6 参看[12]和[42])

练 习 5

1. 证明 $(\overset{m}{\otimes}T)P(\sigma)=P(\sigma)(\overset{m}{\otimes}T)$ 及 $(\overset{m}{\otimes}T)T(G,\chi)$ $=T(G,\chi)(\overset{m}{\otimes}T)$.

2. 假定 $V_\chi(G)\neq\{0\}$，证明 $K(T)$ 为可逆当且仅当 T 为可逆且在可逆的情况下有 $K(T^{-1})=K(T)^{-1}$.

3. 设 $S,T\in L(V,V)$ 且 $S\geqslant0,T\geqslant0$，证明 $K(S+T)\geqslant K(S)+K(T)$. 特别地若 $S\geqslant T$，则 $K(S)\geqslant K(T)$.

(提示：第二章练习 6.4)

4. 证明当 $G=S_m,\chi=\varepsilon,\rho(T)<m$ 时有 $K(T)=0$.

5. 设$T\in L(V, V)$是非负定的，其特征值为$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$，证明在$V_1(G)$中，$K(T)$的最大特征值为$\lambda_1^m$，最小特征值为$\lambda_n^m$.

6. 证明若$\chi(e)=1,E=\{e_1,\cdots,e_n\}$是内积空间$V$的规格化正交基，则$E_*'=\left\{\sqrt{\frac{|G|}{|G_\alpha|}}\, e_\alpha^* \,|\, \alpha\in\overline{\Delta}\right\}$是$V_\chi(G)$的规格化正交基.

7. 设$\chi(e)=1,E=\{e_1,\cdots,e_n\}$是$V$的有序基,$E_*=\{e_\alpha^*|\alpha\in\overline{\Delta}\}$,$T\in L(V,V)$,$[T]_E^E=A=(a_{ij})$,证明$([K(T)]_{E_*}^{E_*})_{\alpha,\beta}$

$$=\frac{1}{|G_\alpha|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\prod_{t=1}^{m}a_{\alpha\sigma(t)\beta(t)},\ \alpha,\beta\in\overline{\Delta}.$$

8. 设$\alpha\in\Gamma_{m,n}$，$\chi(e)=1$，证明若$\sum\limits_{\sigma\in G_\alpha}\chi(\sigma)=0$，则

$\sum\limits_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\varphi(\alpha\sigma)=0$，其中$\varphi:\Gamma_{m,n}\to W$是任意的映射.

9. 直接用$K(A)$的定义((4)式)，证明$K(AB)=K(A)K(B)$.

(提示：对比第一章定理10.1)

§6 广义矩阵函数

这一节是张量对称类理论的一个方面的应用.

对于$A=(a_{ij})\in M_m$，我们知道A的行列式是一个矩阵函数，即

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_m}\varepsilon(\sigma)\prod_{t=1}^{m}a_{t\sigma(t)}.$$

关于广义矩阵函数已经有很广的定义，结合张量对称类，我们只考虑这样的定义：

$$d_G^\chi(A)=\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\prod_{t=1}^{m}a_{t\sigma(t)},\tag{1}$$

其中 G 是 S_m 的子群，χ 是群 G 的不可约特征标. 本节将用张量对称类的理论来研究 $d_G^\chi(A)$的一些重要性质.

当 $G=S_m,\chi\equiv1$时，$d_{S_m}^1(A)$ 记作 $\operatorname{per}A$,称为 A 的积和式（permanent),它和行列式一样是重要的矩阵函数.

$$\operatorname{per}A=\sum_{\sigma\in S_m}\prod_{t=1}^{m}a_{t\sigma(t)}.$$

另一个常用的矩阵函数是当 $G=\{e\}$的情形,称为 Hadamard 函数，记作

$$h(A)=\prod_{t=1}^{m}a_{tt}.$$

利用 $\chi(\sigma^{-1})=\overline{\chi(\sigma)}$ 立即可写出 $d_G^\chi(A)$ 的一些简单性质.

定理6.1 设 $A\in M_m$，$d_G^\chi(A)$如(1)所定义，则有

(a) $d_G^\chi(I_m)=\chi(e)$.

(b) 若 A 是上三角矩阵，则 $d_G^\chi(A)=\chi(e)\det A=\chi(e)\operatorname{per}A=\chi(e)h(A)$.

(c) $d_G^\chi(A^\mathrm{T})=d_G^{\bar\chi}(A)$（这里 $\bar\chi(\sigma)$ 即为 $\overline{\chi(\sigma)}$，$\forall\sigma\in G$)

(d) $d_G^\chi(A^*)=\overline{d_G^\chi(A)}$,故若 A 是厄米特的，则 $d_G^\chi(A)$ 为实数.

证 (a)与(b)显然.

(c) 因为$d_G^\chi(A^\mathrm{T})=\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\prod_{t=1}^{m}a_{\sigma(t)t}=\sum_{\sigma\in G}\overline{\chi(\sigma)}$

$\prod_{t=1}^{m}a_{t\sigma(t)}=d_G^{\bar{\chi}}(A)$.

(d) $d_G^\chi(A^*)=d_G^\chi((\bar{A})^\mathrm{T})=d_G^{\bar{\chi}}(\bar{A})=\overline{d_G^\chi(A)}$. ▍

推导广义矩阵函数 $d_G^\chi(A)$的进一步性质，主要用到定理3.4和定理5.7.这两定理表明了张量对称类与广义矩阵函数的密切关系，用广义矩阵函数的记号它们可改写为：

定理6.2 设V是内积空间，$V_\chi(G)$上定义了相应的诱导内积，又设$v_1, \cdots, v_m$，$u_1,\cdots,u_m\in V$并令$a_{ij}=(v_i,u_j)$，$A=(a_{ij})\in M_m$，则

$$(v^*,u^*)=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\prod_{t=1}^{m}(v_t,u_{\sigma(t)})$$

$$=\frac{\chi(e)}{|G|}d_G^\chi(A)=\frac{\chi(e)}{|G|}d_G^\chi(((v_i,u_j)).\quad ▍$$

定理6.3 设$E=\{e_1,\cdots,e_n\}$是V的规格化正交基，$T\in L(V,V)$，$[T]_E^E=A=(a_{ij})\in M_n$，则对任意$\alpha,\beta\in\Gamma_{m,n}$有

$$(K(T)e_\beta^*,e_\alpha^*)=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\overline{\chi(\sigma)}\prod_{t=1}^{m}a_{\alpha(t)\beta\sigma(t)}$$

$$=\frac{\chi(e)}{|G|}d_G^{\bar{\chi}}(A[\alpha|\beta])$$

$$=\frac{\chi(e)}{|G|}d_G^\chi(A^\mathrm{T}[\beta|\alpha]),$$

这里$A[\alpha|\beta]=(a_{\alpha(i)\beta(j)})\in M_m$. 特别重要的是当$m=n$时有

$(K(T)e_1*\cdots*e_n, e_1*\cdots*e_n)$

$$=\frac{\chi(e)}{|G|}d_G^{\bar{\chi}}(A)=\frac{\chi(e)}{|G|}d_G^{\chi}(A^{\mathrm{T}}).$$ ∎

下面就用这两结论来推导一系列重要的矩阵不等式和恒等式. 注意，当 χ 是 G 的不可约特征标时，$\bar{\chi}$ 也是，反之亦然且 $\chi(e)=\bar{\chi}(e)$，故我们若证明了关于 $d_G^{\bar{\chi}}(A)$ 的结论，则对于 $d_G^{\chi}(A)$ 自然也成立.

定理6.4 设 $A,B\in M_{m,n}$，则

$$|d_G^{\chi}(AB^*)|^2\leqslant d_G^{\chi}(AA^*)d_G^{\chi}(BB^*). \qquad (2)$$

证 令 $V=M_{1,n}$ 并定义自然内积及相应的诱导内积，再令 $v_i=A_{(i)}$（A 的第 i 行），$u_j=B_{(j)}$（B的第 j 行）. 用定理 6.2 就有

$$(v^*,u^*)=\frac{\chi(e)}{|G|}d_G^{\chi}((v_i,u_j))=\frac{\chi(e)}{|G|}d_G^{\chi}(AB^*)$$

再用 Cauchy-Schwarz 不等式 $|(v^*,u^*)|^2\leqslant(v^*,v^*)(u^*,u^*)$ 即得(2). ∎

定理6.5 设 $A\in M_m$，则

$$|d_G^{\chi}(A)|^2\leqslant\chi(e)d_G^{\chi}(AA^*). \qquad (3)$$

证 在(2)中取 $A\in M_m$，$B=I_m$ 再用定理 6.1 即得(3). ∎

定理6.6 (Schur)设 $A\in M_m$ 是非负定的，则

$$d_G^{\chi}(A)\geqslant\chi(e)\det A. \qquad (4)$$

证 因 $A\geqslant0$，故存在上三角矩阵 L 使 $A=LL^*$（第一章练习5.9）. 由定理 6.1(b)及 $A\geqslant0$ 就有

$$|d_G^{\chi}(L)|^2=\chi(e)^2|\det L|^2=\chi(e)^2\det A,$$

用(3)又有

$|d_G^{\chi}(L)|^2\leqslant\chi(e)d_G^{\chi}(A)$，联合起来即得(4). ∎

由此定理，若 $A\geqslant 0$ 则有 $d_G^\chi(A)\geqslant 0$，$\det A\leqslant \operatorname{per}A$ 及 $\det A\leqslant h(A)$.

定理6.7 (Fischer 不等式) 设 $A\in M_m$ 是非负定的，则

$$\det A\leqslant \det A[1,\cdots,p|1,\cdots,p]\det A[p+1,\cdots,m|p+1,\cdots,m]. \tag{5}$$

证 这是定理 6.6 的特殊情形. 取G为S_m中所有置换 $\sigma\pi$ 构成的群，其中 σ 是集合 $\{1,\cdots,p\}$ 上的置换，π 是集合 $\{p+1,\cdots,m\}$上的置换. 令 $\chi(\sigma\pi)=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\pi)$，则 χ 是 G的不可约特征标 (1 阶). 这时 $d_G^\chi(A)$即为(5)的右端. ∎

定理6.8 设 $A\in M_m$，$I(G)$为G的全部不可约特征标，则

$$h(A)=\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in I(G)}\chi(e)d_G^\chi(A).$$

特别当 $A\geqslant 0$ 时有

$$h(A)\geqslant\frac{\chi(e)}{|G|}d_G^\chi(A),\quad h(A)\geqslant\frac{1}{m!}\operatorname{per}A.$$

证 因为存在 $v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_m$ 使 $a_{ij}=(v_i,u_j)$ (第一章练习 6.3)，故用定理 6.2 及定理 2.1 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in I(G)}\chi(e)d_G^\chi(A)&=\sum_{\chi\in I(G)}(T(G,\chi)v^\otimes,\\&\quad T(G,\chi)u^\otimes)\\&=\Big(\sum_{\chi\in I(G)}T(G,\chi)v^\otimes,u^\otimes\Big)=(v^\otimes,u^\otimes)\\&=\prod_{i=1}^m(v_i,u_i)=h(A).\end{aligned}$$

剩下部分注意到 $A\geqslant 0$ 时 $d_G^\chi(A)\geqslant 0$ 即得. ∎

下面用定理 6.2 来推导可合对称张量相等的一个充要条

件.

定理6.9 设 $u_1,\cdots,u_m$ 是 V 中线性无关的向量，则 $v_1*\cdots*v_m=u_1*\cdots*u_m$ 的充要条件是

$$v_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}u_j,i=1,\cdots,m \text{ 且 } d_G^\chi(AA^*)=d_G^\chi(A)$$
$$=\chi(e).$$

证 必要性：因为 $u_1,\cdots,u_m$ 线性无关，由定理 3.2 知 $u^*\neq 0$. 又由 $v^*=u^*\neq 0$，用定理 3.3 得 $\langle v_1,\cdots,v_m\rangle=\langle u_1,\cdots,u_m\rangle$. 于是存在 $A=(a_{ij})\in M_m$ 使 $v_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}u_j,i=1,\cdots,m$. 现在在 V 上定义内积使 $u_1,\cdots,u_m$ 成为规格化正交组，这样就有 $(u_i,u_j)=\delta_{ij},(v_i,u_j)=a_{ij},(v_i,v_j)=(AA^*)_{ij}$，应用定理 6.2 就得

$$(v^*,u^*)=\frac{\chi(e)}{|G|}d_G^\chi((v_i,u_j))=\frac{\chi(e)}{|G|}d_G^\chi(A).$$

$$(u^*,u^*)=\frac{\chi(e)}{|G|}d_G^\chi(I_m)=\frac{\chi(e)^2}{|G|}.$$

$$(v^*,v^*)=\frac{\chi(e)}{|G|}d_G^\chi((v_i,v_j))=\frac{\chi(e)}{|G|}d_G^\chi(AA^*).$$

再由 $v^*=u^*$ 即得 $d_G^\chi(AA^*)=d_G^\chi(A)=\chi(e)$.

充分性：由条件及上面的推导即得

$$(v^*,u^*)=(u^*,u^*)=(v^*,v^*) \tag{6}$$

于是 $|(v^*,u^*)|^2=(v^*,v^*)(u^*,u^*)$. 再由 $u^*\neq 0$ 及 Cauchy-Schwarz 不等式的等号成立的条件就有 $v^*=cu^*$，代入(6)式即得 $c=1$. ∎

定理6.10 设 $A,B\in M_m$ 是非负定的，则

$$d_G^\chi(A+B)\geqslant d_G^\chi(A)+d_G^\chi(B).$$

特别地若 $A\geqslant B$，则 $d_G^\chi(A)\geqslant d_G^\chi(B)$.

证 设 E 是 V 的规格化正交基且 $\dim V=m$，则存在 T，$S\geqslant 0$，使 $[T]_E^E=A,[S]_E^E=B$. 注意到 $K(T+S)\geqslant K(T)+K(S)$（练习5.3），$[T+S]_E^E=A+B$，再应用定理 6.3（然后把 $\bar{\chi}$ 换为 χ）即得所求. ▌

现在我们来证明广义矩阵函数的 Cauchy-Binet 定理.

定理6.11(Cauchy-Binet)设 $A,B\in M_n$，G 是 S_m 的子群，χ 是群 G 的不可约特征标，则对于 $\alpha,\beta\in\Omega=\{\omega\in\Gamma_{m,n}|$

$\sum\limits_{\sigma\in G_\omega}\chi(\sigma)\neq 0\}$有

$$d_G^\chi((AB)[\alpha|\beta])=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\omega\in\Omega}d_G^\chi(A[\alpha|\omega])$$

$$\cdot d_G^\chi(B[\omega|\beta]).$$

证 设 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$是内积空间 V 的规格化正交基，显然存在 $T,S\in L(V,V)$使$[T]_E^E=A,[S]_E^E=B$.注意到$\{e_\omega^\otimes|\omega\in\Gamma_{m,n}\}$ 是$\overset{m}{\otimes}V$ 关于诱导内积的规格化正交基，应用定理 6.3 及第一章定理 3.3 就得

$$\frac{\chi(e)}{|G|}d_G^{\bar{\chi}}((AB)[\alpha|\beta])=(K(TS)e_\beta^*,e_\alpha^*)$$

$$=(K(S)e_\beta^*,K(T^*)e_\alpha^*)$$

$$=\sum_{\omega\in\Gamma_{m,n}}(K(S)e_\beta^*,e_\omega^\otimes)(e_\omega^\otimes,K(T^*)e_\alpha^*)$$

$$=\sum_{\omega\in\Omega}(K(T)e^*_\omega, e^*_\alpha)(K(S)e^*_\beta, e^*_\omega)$$

$$=\frac{\chi(e)^2}{|G|^2}\sum_{\omega\in\Omega} d_G^{\bar\chi}(A[\alpha|\omega])d_G^{\bar\chi}(B[\omega|\beta]).$$

下面是关于不同群的广义矩阵函数的关系.

定理6.12 设 H 是 G 的子群（G 为 S_m 的子群），χ 是 G 的不可约特征标，假定 χ 在 H 上的限制也是 H 的不可约特征标，则对于非负定的 $A\in M_m$ 有

$$\frac{1}{|H|}d_H^\chi(A)\geqslant\frac{1}{|G|}d_G^\chi(A).$$

证 设群 G 的提供 χ 的不可约矩阵表示为 $B(\sigma)=(b_{ij}(\sigma))$，则有

$$T(G,\chi)T(H,\chi)=\frac{\chi(e)^2}{|G||H|}\sum_{\sigma\in G}\sum_{\pi\in H}$$

$$\cdot\chi(\sigma)\chi(\pi)P(\sigma\pi)$$

$$=\frac{\chi(e)^2}{|G||H|}\sum_{\tau\in G}\sum_{\pi\in H}\chi(\tau\pi^{-1})\chi(\pi)P(\tau)$$

$$=\frac{\chi(e)^2}{|G||H|}\sum_{\tau\in G}\sum_{i,j=1}^{\chi(e)} b_{ij}(\tau)\sum_{k=1}^{\chi(e)}$$

$$\cdot\left(\sum_{\pi\in H} b_{ji}(\pi^{-1})b_{kk}(\pi)\right)P(\tau)$$

$$=\frac{\chi(e)^2}{|G||H|}\sum_{\tau\in G}\sum_{i,j=1}^{\chi(e)} b_{ij}(\tau)\frac{|H|}{\chi(e)}\delta_{ij}P(\tau)$$

（附录定理3.4）

$$=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\tau\in G}\chi(\tau)P(\tau)=T(G,\chi).$$

现在取 V 为维数是 m 的内积空间并在 $\overset{m}{\otimes}V$ 上定义诱导内积. 由 $T(G,\chi)$ 是正交投影，故对任意的 $z\in\overset{m}{\otimes}V$ 有

$$\|z\|\geqslant\|T(G,\chi)z\|.$$

以 $T(H,\chi)z$ 代替上式的 z 就得

$$\|T(H,\chi)z\|\geqslant\|T(G,\chi)T(H,\chi)z\|=\|T(G,\chi)z\|.$$

又由 $0\leqslant A\in M_m$ 及 $\dim V=m$ 知，必存在 $v_1,\cdots,v_m\in V$，使得 $(v_i,v_j)=a_{ij}$ (第一章练习5.10)，于是令 $z=v^{\otimes}$ 就有

$$(T(H,\chi)v^{\otimes},T(H,\chi)v^{\otimes})\geqslant(T(G,\chi)v^{\otimes},T(G,\chi)v^{\otimes}).$$

最后用定理 6.2 即得 $\frac{\chi(e)}{|H|}d_H^{\chi}(A)\geqslant\frac{\chi(e)}{|G|}d_G^{\chi}(A)$. ∎

关于广义矩阵函数，人们已经提出过许多有意思的猜想，有好些至今尚没被证明. 例如一个叙述起来较简单的是：

猜想：设 $A\in M_m$ 是非负定的，χ 是群 G(S_m 的子群)的任意不可约特征标，则 $d_G^{\chi}(A)\leqslant\chi(e)\operatorname{per}A$.

(文献[8]有定理 6.7 的推广，文献[24]有比定理 6.8 更广的结论，定理 6.9 参看[33]，定理 6.10 参看[19]，定理 6.12参看[34]和[23]或[26])

练　习　6

1. 证明若 $A,B\in M_m$ 是非负定的，则 $\det(A+B)\geqslant\det A+\det B$, $\operatorname{per}(A+B)\geqslant\operatorname{per}A+\operatorname{per}B$.

2. 设 $A\in M_m$，证明 Hadamard 行列式定理

$$|\det A|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|^2.$$

(提示：$\det(AA^*) \leqslant h(AA^*)$)

3． 证明当 $\chi(e)=1$ 时的 Cauchy-Binet 定理：对于 α，$\beta\in\overline{\Delta}$，

$$d_G^\chi((AB)[\alpha|\beta]) = \sum_{\omega\in\overline{\Delta}} \frac{1}{|G_\omega|} d_G^\chi(A[\alpha|\omega]) \cdot d_G^\chi(B[\omega|\beta]).$$

4． 设 H 是 G 的子群，假定 G 的不可约特征标 χ 在 H 上的限制也是不可约的，证明 $V_\chi(G)\subset V_\chi(H)$.

下面两个是已经证明的(较难)但曾经是很有名的猜想．有兴趣的读者可查阅提示中的文献.

5． 若 $A\in M_m$ 是非负定的，则 $\operatorname{per}A \geqslant \operatorname{per}A[1,\cdots,p|1,\cdots,p]\operatorname{per}A[p+1,\cdots,m|p+1,\cdots,m]$.

(提示：看文献[10]或[20])

6． 设 $A\in M_m$ 是双随机矩阵（即 A 的元素非负且每行元素之和为 1，每列元素之和也为 1），则 $\operatorname{per}A \geqslant \frac{m!}{m^m}$ 且等号成立当且仅当 A 的每个元素为 $\frac{1}{m}$.

(提示：可看文献[11])

第四章　反对称张量空间与完全对称张量空间

这一章专门讨论一下在各学科中用得较多的两个张量对称类.

§1　反对称张量空间

当 $G=S_m$, $\chi=\varepsilon$ 时，$V_\varepsilon(S_m)$ 写为 $\overset{m}{\wedge}V$ 称为反对称张量空间或Grassmann空间或 m 次外积空间等. 这时可合元素 v^* 写成 $v^\wedge=v_1\wedge\cdots\wedge v_m$ 称为 $v_1,\cdots,v_m$ 的外积，而诱导算子 $K(T)$ 则写为 $C_m(T)$，诱导矩阵 $K(A)$ 写为 $C_m(A)$ 或 $A^{(m)}$.

定理1.1　在反对称张量空间 $\overset{m}{\wedge}V$ 中，设 $m\leqslant n=\dim V$，则有

(a)　$\Delta=G_{m,n}$;　$\bar{\Delta}=\hat{\Delta}=Q_{m,n}$;　$\dim\left(\overset{m}{\wedge}V\right)=\binom{n}{m}$.

(b)　若 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的基，则 $E_\wedge=\{e_\alpha^\wedge \mid \alpha\in Q_{m,n}\}$ 是 $\overset{m}{\wedge}V$ 的基. 若 E 是内积空间 V 的规格化正交基，则 $E'_\wedge=\{\sqrt{m!}\,e_\alpha^\wedge \mid \alpha\in Q_{m,n}\}$ 是 $\overset{m}{\wedge}V$ 的关于诱导内积的规格化正交基.

(c)　对于 $\sigma\in S_m$ 有 $v_\sigma^\wedge=\varepsilon(\sigma)v^\wedge$. 当 $i\neq j$ 而 $v_i=v_j$ 时

有 $v^\wedge=0$.

(d) $v_1\wedge\cdots\wedge v_m=0$ 的充要条件是 $v_1,\cdots,v_m$ 线性相关.

(e) 若 $u_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}v_j$, $i=1,\cdots,m$,则 $u^\wedge=\det(a_{ij})v^\wedge$.

(f) 若 $u^\wedge=v^\wedge\neq 0$,则 $u_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}v_j$, $i=1,\cdots,m$ 且 $\det(a_{ij})=1$.

(g) 若 $v_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j$, $i=1,\cdots,m$,

则 $v^\wedge=\sum_{\alpha\in Q_{m,n}}\det A[1,\cdots,m|\alpha]e_\alpha^\wedge$.

证 (a)、(b)、(c) 看第三章的相应定理和练习，只要注意到 $\varepsilon(e)=1$ 及当 $\alpha\in Q_{m,n}$ 时，$G_\alpha=\{e\}$ 即得.

(d)由第三章定理 3.2 只需证明条件的充分性：由 $v_1,\cdots,v_m$ 线性相关就有某 j 使 $v_j=\sum_{\substack{t=1\\t\neq j}}^{m}c_tv_t$,于是

$$v_1\wedge\cdots\wedge v_m=\sum_{\substack{t=1\\t\neq j}}^{m}c_tv_1\wedge\cdots\wedge v_{j-1}\wedge v_t\wedge v_{j+1}\wedge\cdots\wedge v_m=0,$$

这是因为求和中的每一项（可合元素）必有两个向量是相同的.

(e) 直接计算得

$$u^\wedge=\left(\sum_{j=1}^{m}a_{1j}v_j\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{j=1}^{m}a_{mj}v_j\right)$$

$$= \sum_{\alpha \in \Gamma_{m,m}} \left(\prod_{i=1}^{m} a_{i\alpha(i)} \right) v_\alpha^\wedge = \sum_{\alpha \in D_{m,m}} \left(\prod_{i=1}^{m} a_{i\alpha(i)} \right) v_\alpha^\wedge$$

$$= \sum_{\sigma \in S_m} \left(\prod_{i=1}^{m} a_{i\sigma(i)} \right) v_\sigma^\wedge = \left(\sum_{\sigma \in S_m} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{m} a_{i\sigma(i)} \right) v^\wedge$$

$$= \det(a_{ij}) v^\wedge. \qquad \text{（练习1.1）}$$

（f） 由第三章定理 3.3 知 $\langle u_1, \cdots, u_m \rangle = \langle v_1, \cdots, v_m \rangle$，于是有 $u_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j$，$i = 1, \cdots, m$，用(e) 即得 $\det(a_{ij}) = 1$.（这是第三章定理 6.9 的特殊情形）

（g） 类似于（e）有

$$v^\wedge = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} e_j \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} a_{mj} e_j \right)$$

$$= \sum_{\omega \in \Gamma_{m,n}} \prod_{i=1}^{m} a_{i\omega(i)} e_\omega^\wedge = \sum_{\omega \in D_{m,n}} \prod_{i=1}^{m} a_{i\omega(i)} e_\omega^\wedge$$

$$= \sum_{\alpha \in Q_{m,n}} \sum_{\sigma \in S_m} \prod_{i=1}^{m} a_{i\alpha\sigma(i)} e_{\alpha\sigma}^\wedge$$

$$= \sum_{\alpha \in Q_{m,n}} \left(\sum_{\sigma \in S_m} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{m} a_{i\alpha\sigma(i)} \right) e_\alpha^\wedge$$

$$= \sum_{\alpha \in Q_{m,n}} \det A[1, \cdots, m | \alpha] e_\alpha^\wedge. \qquad |$$

现在我们讨论诱导矩阵 $C_m(A)$ 的性质. 首先由一般诱导矩阵 $K(A)$与广义矩阵函数的定义(第三章)，对于$A \in M_n$，$\alpha, \beta \in \bar{\Delta}$ 有

$$K(A)_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\sqrt{|G_\alpha| |G_\beta|}} d_G^\chi (A[\alpha | \beta]). \qquad (1)$$

具体化到 $C_m(A)$ 就成为

$$C_m(A)_{\alpha,\beta}=d^*_{S_m}(A[\alpha|\beta])=\det A[\alpha|\beta],\ \alpha,\beta\in Q_{m,n}.$$

再结合诱导算子与诱导矩阵的关系就可写出这样一个结论：

定理1.2 设 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的有序基，$E_\wedge=\{e^\wedge_\alpha|\alpha\in Q_{m,n}\}$，$E'_\wedge=\{\sqrt{m!}\,e^\wedge_\alpha|\alpha\in Q_{m,n}\}$ 都排成字典次序．又 $T\in L(V,V)$，$[T]^E_E=A$，则对于 $\alpha,\beta\in Q_{m,n}$ 有

$$\left([C_m(T)]^{E'_\wedge}_{E'_\wedge}\right)_{\alpha,\beta}=\left([C_m(T)]^{E_\wedge}_{E_\wedge}\right)_{\alpha,\beta}$$

$$=C_m(A)_{\alpha,\beta}=\det A[\alpha|\beta].$$ ▌

诱导矩阵 $C_m(A)$ 又称为 A 的 m 级相伴矩阵或 m 级**复合矩阵**．我们看到，它是由 A 的所有 m 阶子式按一定次序排列而成．

$C_m(A)$ 作为诱导矩阵，自然它具有一般诱导矩阵 $K(A)$ 的一系列性质（第三章定理 5.9）．例如其中有一个性质为 $C_m(AB)=C_m(A)C_m(B)$，容易看到这个性质使得通常的 Cauchy-Binet 行列式定理（第一章定理 10.1）成为很显然的事情，这是因为利用矩阵的乘法有

$$C_m(AB)_{\alpha,\beta}=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}C_m(A)_{\alpha,\omega}C_m(B)_{\omega,\beta},\alpha,\beta\in Q_{m,n}.$$

此式即为

$$\det(AB)[\alpha|\beta]=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}\det A[\alpha|\omega]\det B[\omega|\beta].$$

（注意：利用（1）式则第三章练习 6.3 也同样成为明显的结论）

下面是 $C_m(A)$ 的其它一些性质，它们是一般诱导矩阵 $K(A)$ 的性质的具体化．

定理1.3 设$m\leqslant n$，$A\in M_n$，A的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则有

(a) $C_m(A^*)=C_m(A)^*$，$C_m(A^{-1})=C_m(A)^{-1}$.

(b) 若$\rho(A)=r\geqslant m$，则$\rho(C_m(A))=\binom{r}{m}$；若$r<m$，则$C_m(A)=0$.

(c) 若A是上三角矩阵，则$C_m(A)$也是.

(d) $C_m(A)$的特征值为$\prod_{t=1}^{m}\lambda_{\alpha(t)}$，$\alpha\in Q_{m,n}$.

(e) $$\operatorname{tr}(C_m(A))=\sum_{\alpha\in Q_{m,n}}\prod_{t=1}^{m}\lambda_{\alpha(t)}$$

$$=\sum_{\alpha\in Q_{m,n}}\det A[\alpha|\alpha].$$

(f) $\det C_m(A)=(\det A)^{\binom{n-1}{m-1}}$ (这个叫做Sylvester-Franke 定理).

(g) 若A分别是规范的，厄米特的，正定的，非负定的，酉的，则$C_m(A)$也相应是. ▌

在推导矩阵A的部分特征值乘积的性质时，复合矩阵$C_m(A)$是一种得力的工具. 下面是利用这种方法得的一个结论，其余看后面练习或文献[36]和[22].

定理1.4 设$A\in M_n$，其特征值依次排为$|\lambda_1(A)|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n(A)|$. 记$R_i(A)=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，$i=1,\cdots,n$，并依次排列为$R_{[1]}(A)\geqslant\cdots\geqslant R_{[n]}(A)$. 则对于$1\leqslant m\leqslant n$，有

$$\prod_{i=1}^{m}|\lambda_i(A)|\leqslant\prod_{i=1}^{m}R_{[i]}(A). \qquad (2)$$

证　首先由 $\lambda_1(A)x=Ax$（x为特征向量），容易得到

$$|\lambda_1(A)|\leqslant R_{[1]}(A).$$

把此式用到 $C_m(A)$上就有

$$|\lambda_1(C_m(A))|=\prod_{i=1}^{m}|\lambda_i(A)|\leqslant R_{[1]}(C_m(A)).$$

于是对任意 $\alpha\in Q_{m,n}$ 利用定理1.2可算得

$$R_\alpha(C_m(A))=\sum_{\beta\in Q_{m,n}}|\det A[\alpha|\beta]|$$

$$=\sum_{\beta\in Q_{m,n}}\left|\sum_{\sigma\in S_m}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{m}a_{\alpha(i)\beta\sigma(i)}\right|$$

$$\leqslant\sum_{\omega\in D_{m,n}}\prod_{i=1}^{m}|a_{\alpha(i)\omega(i)}|\leqslant\sum_{\gamma\in\Gamma_{m,n}}\prod_{i=1}^{m}|a_{\alpha(i)\gamma(i)}|$$

$$=\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{\alpha(i)j}|=\prod_{i=1}^{m}R_{\alpha(i)}(A)\leqslant\prod_{i=1}^{m}R_{[i]}(A).\quad\blacksquare$$

我们可以利用(2)式来表示按模最小特征值的一个下界. 因为 $\det A=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i(A)$，故有

$$|\lambda_n(A)|\geqslant\frac{|\det A|}{\prod_{i=1}^{n-1}R_{[i]}(A)}.\tag{3}$$

当讨论矩阵 A 的部分特征值之和或其它对称函数性质时，利用导数矩阵是方便的.

设 $A\in M_n, t\in\mathbf{C}$，则可写

$$C_m(I_n+tA)=I_{\binom{n}{m}}+tD_m^{(1)}(A)+t^2D_m^{(2)}(A)+\cdots$$

$$+t^mD_m^{(m)}(A).$$

矩阵 $D_m^{(r)}(A)$称为 $C_m(A)$的 r 阶导数矩阵.

因为若 A 是上三角矩阵，则 I_n+tA 也是，进而 $C_m(I_n+tA)$也是上三角矩阵. 于是有下面的明显结论.

定理1.5 若 A 是上三角矩阵，则 $D_m^{(r)}(A)$ 也是上三角矩阵. ▌

利用此结论很容易求得 $D_m^{(r)}(A)$ 的特征值与 A 的特征值的关系.

定理1.6 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则 $D_m^{(r)}(A)$ 的特征值为

$$\sum_{\omega\in Q_{r,m}}\prod_{i=1}^{r}\lambda_{\alpha\omega(i)},\quad \alpha\in Q_{m,n}.$$

特别地，一阶导数矩阵 $D_m^{(1)}(A)$的特征值为 $\lambda_{\alpha(1)}+\cdots+\lambda_{\alpha(m)}$，$\alpha\in Q_{m,n}$.

证 首先有酉矩阵 U，使$UAU^*=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}=\tilde{A}$. 于是

$$\begin{aligned}C_m(I_n+tA)&=C_m(U^*)C_m(I_n+t\tilde{A})C_m(U)\\&=C_m(U^*)\Big(I_{\binom{n}{m}}+tD_m^{(1)}(\tilde{A})\\&\quad+t^2D_m^{(2)}(\tilde{A})+\cdots\Big)C_m(U).\end{aligned}$$

显然 $D_m^{(r)}(A)$ 与 $D_m^{(r)}(\tilde{A})$ 具有相同的特征值. 由上面知 $D_m^{(r)}(\tilde{A})$是上三角矩阵，故其对角线元素即为其特征值.

又 $C_m(I_n+t\tilde{A})$在(α,α)位置上的对角线元素为

$$\det(I_n+t\tilde{A})[\alpha|\alpha]=\prod_{i=1}^{m}(1+t\lambda_{\alpha(i)})$$

$$=1+t(\lambda_{\alpha(1)}+\cdots+\lambda_{\alpha(m)})+t^2\sum_{\omega\in Q_{2,m}}\prod_{i=1}^{2}\lambda_{\alpha\omega(i)}+\cdots.$$

故 $D_m^{(r)}(A)$ 的特征值为 $\sum_{\omega\in Q_{r,m}}\prod_{i=1}^{r}\lambda_{\alpha\omega(i)},\quad \alpha\in Q_{m,n}$. ∎

（定理 1.1 参看[12]，定理 1.4 参看[36]，定理 1.6 参看[15]）

练　习　1

1. 对于反对称张量空间 $\overset{m}{\wedge}V(m\leqslant n=\dim V)$，证明这时集合 $\Omega=D_{m,n}$.

2. 证明若 $T\in L(V,V)$，$\dim V=n$，则对于任意的 $v_1,\cdots,v_n\in V$，都成立

$$C_n(T)v_1\wedge\cdots\wedge v_n=(\det T)v_1\wedge\cdots\wedge v_n.$$

3. 假定某 $V_\chi(G)\neq\{0\}$，且当 $v_1,\cdots,v_m$ 线性相关时就有 $v_1*\cdots*v_m=0$，证明 $V_\chi(G)=\overset{m}{\wedge}V$，即 $G=S_m$ 且 $\chi=\varepsilon$.

4. 设 $e_1,\cdots,e_k\in V$ 是线性无关的且 $\sum_{i=1}^{k}e_i\wedge v_i=0$，证明存在对称矩阵 $A=(a_{ij})\in M_k$ 使得 $v_i=\sum_{j=1}^{k}a_{ij}e_j,\ i=1,\cdots,k$.（这个称为 Cartan 引理）

（提示：扩充 $e_1,\cdots,e_k$ 为 V 的基 $e_1,\cdots,e_n$. 注意 $\{e_i\wedge e_j|1\leqslant i<j\leqslant n\}$ 是 $\overset{2}{\wedge}V$ 的基及 $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}e_i\wedge e_j=\sum_{i<j}(a_{ij}-a_{ji})e_i\wedge e_j$.）

5. 记 $E_i(A)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$，其余符号同定理1.4. 证明

$$\prod_{i=1}^{m}|\lambda_i(A)|\leqslant\binom{n}{m}\prod_{i=1}^{m}E_{[i]}(A)$$

及

$$|\lambda_n(A)|\geqslant\frac{|\det A|}{n\prod_{i=1}^{n-1}E_{[i]}(A)}.$$

（提示：第三章练习6.2或参看[36]）

6. 证明 $\prod_{i=1}^{m}|\lambda_i(A)|\leqslant\prod_{i=1}^{m}\sqrt{\lambda_i(A^*A)}$.

（提示：利用 $|\lambda_1(A)|\leqslant\sqrt{\lambda_1(A^*A)}$.）

7. 设 $A\in M_n$，其特征值各不相同，特征值的最小距离记为 $\mathrm{Sep}(A)=\min_{i\neq j}|\lambda_i(A)-\lambda_j(A)|$，并令 $L=A\otimes I_n-I_n\otimes A$，

证明

$$\mathrm{Sep}(A)\geqslant\sqrt{\frac{|\mathrm{tr}(C_{n^2-n}(L))|}{\prod_{i=1}^{n^2-n-2}R_{[i]}(L)}}.$$

（提示：L 的特征值为 $\lambda_i(A)-\lambda_j(A)$, $i,j=1,\cdots,n$. 这些特征值只有 n^2-n 个非零的，故 $C_{n^2-n}(L)$ 只有一个非零特征值，它就是

$$\prod_{i\neq j}(\lambda_i(A)-\lambda_j(A))=(-1)^{\frac{n^2-n}{2}}\prod_{i<j}(\lambda_i(A)-\lambda_j(A))^2$$
$$=\mathrm{tr}(C_{n^2-n}(L)).$$

再用(5)式即得）

8. 设 $A=A^*\in M_n$ 且特征值各不相同，$L=A\otimes I_n-I_n\otimes A$，证明

$$\mathrm{Sep}(A)\geqslant\sqrt{\frac{|\det L[\omega|\omega]|}{\prod_{i=1}^{n^2-n-2}R_{[i]}(L)}},$$

其中 ω 为 Q_{n^2-n,n^2} 的任一序列.

（提示：若 $A=A^*$，则 $|\lambda_1(A)|\geqslant\max_i|a_{ii}|$.）

9. 证明 $M=D_2^{(1)}(A^2)-2C_2(A)$ 的特征值为 $(\lambda_i(A)-\lambda_j(A))^2$，$i<j$. 又当 A 的特征值各不相同时，试用矩阵 M 来表示 $\mathrm{Sep}(A)$ 的一个非零下界.

§2 反对称张量空间的可合元素

$\overset{m}{\wedge}V$ 空间的可合元素无论在理论上或实际上都起重要作用. 本节讨论可合元素的性质和一些判断方法.

上一节已证明可合元素 $v^\wedge=v_1\wedge\cdots\wedge v_m$ 不为 0 的充要条件是 $v_1,\cdots,v_m$ 线性无关，也有若 $v^\wedge\neq0$ 则 $u^\wedge=v^\wedge$ 的充要条件是 $u_i=\sum_{j=1}^{m}c_{ij}v_j$，$i=1,\cdots,m$ 且 $\det(c_{ij})=1$. 因此两个 m 维子空间 $\langle u_1,\cdots,u_m\rangle$ 与 $\langle v_1,\cdots,v_m\rangle$ 相同的充要条件是 $u^\wedge=cv^\wedge\neq0$. 这样一来，一个 m 维子空间就与一个非零可合元素（不算常数倍）相对应.

设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的基，$\{v_1,\cdots,v_m\}$ 是 V 的 m 维子空间 W 的基，则

$$v^\wedge=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}a_\omega e_\omega^\wedge,$$

于是除了一个非零常数倍外，$\binom{n}{m}$个数 a_ω 由子空间 W 唯一确定，也就是说若取W的另一组基$\{u_1,\cdots,u_m\}$且表示为

$$u^\wedge=\sum_{\omega\in Q_{m,n}} b_\omega e_\omega^\wedge,$$

则存在 $c\neq 0$，使 $a_\omega=cb_\omega$，$\omega\in Q_{m,n}$.

可合元素 $v^\wedge$ 的$\binom{n}{m}$个坐标 a_ω 称为 Plücker 坐标. 后面我们会看到不是任何$\binom{n}{m}$个数都能成为可合元素的坐标的，也就是说 Plücker 坐标本身存在一定的关系，这种关系有好些表达形式，它们都可作为可合元素的判断准则.

设 $p:\Gamma_{m,n}\to \boldsymbol{C}$ 是一个函数，它满足条件

$$p(\omega\sigma)=\varepsilon(\sigma)p(\omega),\ \sigma\in S_m,\omega\in\Gamma_{m,n}. \qquad (1)$$

显然对于$\overset{m}{\wedge}V$ 中的任一元素 $z=\sum_{\omega\in Q_{m,n}} c_\omega e_\omega^\wedge$ 其坐标 c_ω（写作函数 $c(\omega)$）都可扩充定义域到 $\Gamma_{m,n}$ 使之满足(1). 反之满足(1)的任一函数 p 都对应着$\overset{m}{\wedge}V$ 中的某一元素 $\sum_{\omega\in Q_{m,n}} p(\omega)e_\omega^\wedge$.

对于 $\alpha,\beta\in\Gamma_{m,n}$ 及满足(1)的 p，我们定义矩阵$P(\alpha,\beta)\in M_m$，它的(i,j)位置上元素为

$$P(\alpha,\beta)_{i,j}=p(\alpha[i,j:\beta]),\quad 1\leqslant i,j\leqslant m,$$

其中 $\alpha[i,j:\beta]\in\Gamma_{m,n}$，它是序列 α 的第 i 个分量用 $\beta(j)$ 代替后得到的序列，即

$\alpha[i,j:\beta]=(\alpha(1),\cdots,\alpha(i-1),\beta(j),\alpha(i+1),$
$\cdots,\alpha(m))\in\Gamma_{m.n}$.

下面是本节的主要结论.

定理2.1 对于 $1\leqslant m\leqslant n$,如果函数 p 满足(1)且不恒等于0,则下面的条件是等价的:

(a) $z=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}p(\omega)e_\omega^\wedge$ 是可合的.

(b) 存在一个矩阵 $A\in M_{m,n}$ 使得 $p(\omega)=\det A[1,\cdots,m|\omega]$, $\omega\in Q_{m,n}$.

(c) $\det P(\alpha,\beta)=p(\alpha)^{m-1}p(\beta)$; $\alpha,\beta\in Q_{m,n}$.

证 (a)$\Longleftrightarrow$(b) 假定$z=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}p(\omega)e_\omega^\wedge$是可合的,那么 $z=v_1\wedge\cdots\wedge v_m$, 写 $v_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j$, $i=1,\cdots,m$, 由定理1.1知 $z=v^\wedge=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}\det A[1,\cdots,m|\omega]e_\omega^\wedge$,比较系数得$p(\omega)=\det A[1,\cdots,m|\omega],\omega\in Q_{m,n}$.反之若(b)成立,用矩阵$A$定义向量$v_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j$, $i=1,\cdots,m$,于是$z=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}p(\omega)e_\omega^\wedge=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}\det A[1,\cdots,m|\omega]e_\omega^\wedge=v_1\wedge\cdots\wedge v_m$ 是可合的.

(b)$\Leftarrow$(c) 对于任意矩阵 $A=(a_{ij})\in M_{m,n}$ 及 $\alpha,\beta\in Q_{m,n}$,我们令

$$S=A[1,\cdots,m|\alpha]=(A_{\alpha(1)}\cdots A_{\alpha(m)})\in M_m,$$

其中 $A_{\alpha(i)}$表示矩阵S的第i列, $i=1,\cdots,m$.类似地令

$$T = A[1,\cdots,m|\beta] = (A_{\beta(1)}\cdots A_{\beta(m)}) \in M_m.$$

如果我们定义 $X=(x_{ij})\in M_m$，其中

$$x_{ij} = \det(A_{\alpha(1)}\cdots A_{\alpha(i-1)}A_{\beta(j)}A_{\alpha(i+1)}\cdots A_{\alpha(m)}),$$
$$1\leqslant i,j\leqslant m,$$

那么应用 Cramer 规则就有

$$SX = T\det S.$$

两边取行列式就得

$$\det S\det X = \det T(\det S)^m.$$

现在若矩阵 S 是可逆的，我们立即得到

$$\det X = \det T(\det S)^{m-1} \qquad (2)$$

若 S 不是可逆的，我们可以用 $S+tI_m$ 代替 S，利用行列式是它的元素的多项式即得(2)式对任何情形都成立.

现在假定 (b) 成立，那么 $\det S = \det A[1,\cdots,m|\alpha] = p(\alpha)$，$\det T = \det A[1,\cdots,m|\beta] = p(\beta)$ 及

$$\begin{aligned}x_{ij} &= \det(A_{\alpha(1)}\cdots A_{\alpha(i-1)}A_{\beta(j)}A_{\alpha(i+1)}\cdots A_{\alpha(m)})\\ &= \det A[1,\cdots,m|\alpha(1),\cdots,\alpha(i-1),\beta(j),\alpha(i+1),\\ &\qquad\cdots,\alpha(m)]\\ &= p(\alpha(1),\cdots,\alpha(i-1),\beta(j),\alpha(i+1),\cdots,\alpha(m))\\ &= p(\alpha[i,j:\beta]),\end{aligned}$$

于是 $X=(x_{ij})=P(\alpha,\beta)$，而(2)式就化为

$$\det P(\alpha,\beta) = p(\alpha)^{m-1}p(\beta).$$

反之假定(c)成立，由 p 不恒等于 0，故存在某 $\alpha\in Q_{m,n}$ 使 $p(\alpha)\neq 0$. 定义矩阵 $A=(a_{ij})\in M_{m,n}$，其中

$$a_{ij} = p(\alpha)^{\frac{1}{m}-1}p(\alpha(1),\cdots,\alpha(i-1),j,\alpha(i+1),$$
$$\cdots,\alpha(m)),\ 1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n.$$

对于任意的 $\omega\in Q_{m,n}$，我们就得

$$\det A[1,\cdots,m|\omega]=\det(a_{i\omega(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$$

$$=\det(p(\alpha)^{\frac{1}{m}-1}p(\alpha(1),\cdots,\alpha(i-1),\omega(j),\alpha(i+1),\cdots,\alpha(m)))_{1\leqslant i,j\leqslant m}$$

$$=(p(\alpha)^{\frac{1}{m}-1})^m\det(p(\alpha[i,j:\omega]))_{1\leqslant i,j\leqslant m}$$

$$=p(\alpha)^{1-m}\det P(\alpha,\omega)$$

$$=p(\alpha)^{1-m}p(\alpha)^{m-1}p(\omega)\quad(\text{用(c)})$$

$$=p(\omega).$$

关于可合元素的等价条件还有许多，例如

$$P(\alpha,\beta)P(\beta,\gamma)=p(\beta)P(\alpha,\gamma),\quad \alpha,\beta,\gamma\in\Gamma_{m,n}$$

也是一个等价条件，它可用类似的方法推出[35]，这里不再详述.

现在用定理 2.1 来证明几个结论.

对于 $\alpha\in D_{m,n}$，我们用 $\mathrm{Im}\alpha$ 表示 α 所有分量的集合．我们说 $\alpha,\beta\in D_{m,n}$ 有 k 个不同的分量是指 $\mathrm{Im}\alpha$ 与 $\mathrm{Im}\beta$ 而言．例如 $\alpha=(1,3,5)$，$\beta=(3,5,6)$ 就只有一个不同的分量．$Q_{m,n}$ 中的序列 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 称作一条链，如果所有相邻的两序列都只有一个不同的分量．下面是可合元素的一个必要条件.

定理2.2 设 $z=\sum\limits_{\omega\in Q_{m,n}}p(\omega)e_\omega^\wedge$ 是可合元素，若 $p(\alpha)\neq0$，$p(\beta)\neq0$ 且 α 与 β 有 k 个不同的分量，则存在另外 $k-1$ 个不同的序列 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-1}\in Q_{m,n}$ 使得 $p(\alpha_i)\neq0$，$i=1,\cdots,k-1$，且 $\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-1},\beta$ 组成一条链.

简言之，就是可合元素的任何两个非零坐标都有非零链相连接.

证 当 $k=1$ 时是显然的，故可假定 $k>1$. 用(1)式扩充 p 的定义域到 $\Gamma_{m,n}$，由定理 2.1 知 $\det P(\alpha,\beta)=p(\alpha)^{m-1}\cdot p(\beta)\neq 0$，故左边的行列式展开式中必有一项不为 0，即存在 $\sigma\in S_m$ 使得 $\prod_{i=1}^{m}p(\alpha[i,\sigma(i):\beta])\neq 0$. 因 α 与 β 有 $k(>1)$ 个不同的分量，故存在 $i_0(1\leqslant i_0\leqslant m)$ 使得 $\alpha(i_0)\notin \mathrm{Im}\beta$. 再由 $p(\alpha[i_0,\sigma(i_0):\beta])\neq 0$ 知 $\beta(\sigma(i_0))\notin \mathrm{Im}\alpha$ 和 $\alpha[i_0,\sigma(i_0):\beta]\in D_{m,n}$. 于是有 $\theta\in S_m$ 使得 $\alpha[i_0,\sigma(i_0):\beta]\theta=\alpha_1\in Q_{m,n}$. 用(1)式得 $p(\alpha_1)=e(\theta)p(\alpha[i_0,\sigma(i_0):\beta])\neq 0$. 显然 α 与 α_1 只有一个不同的分量，而 α_1 与 β 有 $k-1$ 个不同的分量. 对 α_1 与 β 重复上述过程即能求得 α_2 直到 α_{k-1}. ▌

此定理可用来判断不可合元素. 即如果 $z=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}p(\omega)\cdot e_\omega^\wedge$ 有两个非零坐标没有非零链连接则 z 不是可合的. 例如我们很容易看出 $z=e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4$ 是不可合元素，因为 $p(1,2)$，$p(3,4)$ 非零但没有非零链连接.

定理2.3 设 $\dim V=n$ 且 $1\leqslant m\leqslant n$，那么 $\overset{m}{\wedge}V$ 中每一个元素都是可合的其充要条件为 $m=1$ 或 $m=n$ 或 $m=n-1$.

证 当 $m=1$ 或 $m=n$ 时，显然 $\overset{m}{\wedge}V$ 中每个元素都是可合的，故只需考虑 $m=n-1$ 的情形. 假定 $z=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}p(\omega)e_\omega^\wedge$ 是 $\overset{m}{\wedge}V$ 的任一元素. 按(1)式扩充函数 p 的定义域到 $\Gamma_{m,n}$，我们来证明 p 满足定理 2.1 中的条件(c).

对于任意的 $\alpha,\beta\in Q_{m,n}$,如果$\alpha=\beta$,由 $P(\alpha,\alpha)=p(\alpha)I_m$ 即知(c)成立. 如果 $\alpha\neq\beta$,由 $m=n-1$ 知 α 与 β 只有一个不同的分量,故 α 中有唯一的分量 $\alpha(t)\notin \mathrm{Im}\beta$ 且存在 $\sigma\in S_m$ 使得除了 $j=t$ 外 $\alpha(j)=\beta\sigma(j)$.于是有

$$\begin{aligned}p(\alpha[t,t:\beta\sigma])&=p(\alpha(1),\cdots,\alpha(t-1),\beta\sigma(t),\\&\quad\alpha(t+1),\cdots,\alpha(m))\\&=p(\beta\sigma(1),\cdots,\beta\sigma(t-1),\beta\sigma(t),\beta\sigma(t+1),\cdots,\\&\quad\beta\sigma(m))=p(\beta\sigma).\end{aligned}$$

也有当 $j\neq t$ 时, $p(\alpha[i,j:\beta\sigma])=p(\alpha[i,j:\alpha])=p(\alpha)\delta_{ij}$,这就是说矩阵 $P(\alpha,\beta\sigma)$ 除第 t 列外其余的列只有对角线元素 $p(\alpha)$不为0,而第 t 列的对角线元素为 $p(\beta\sigma)$,因此我们有

$$\det P(\alpha,\beta\sigma)=p(\alpha)^{m-1}p(\beta\sigma)=\varepsilon(\sigma)p(\alpha)^{m-1}p(\beta).$$

另一方面由行列式的性质有

$$\begin{aligned}\det P(\alpha,\beta\sigma)&=\det(p(\alpha[i,\sigma(j):\beta]))\\&=\varepsilon(\sigma)\det(p(\alpha[i,j:\beta]))=\varepsilon(\sigma)\det P(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

由此两式就得$\det P(\alpha,\beta)=p(\alpha)^{m-1}p(\beta)$,即条件(c)满足,故 $\overset{n-1}{\wedge}V$ 的每一个元素都是可合的.

反之,假定 $2\leqslant m\leqslant n-2$.我们令 $\alpha=(1,\cdots,m)$, $\beta=(1,\cdots,m-2,m+1,m+2)$,则$z=e_\alpha^\wedge+e_\beta^\wedge$ 是不可合的,这是因为 α 与 β 有两个不同分量而 z 的坐标中没有非零链连接,由定理 2.2 知 z 是不可合的. 这说明当 $2\leqslant m\leqslant n-2$ 时,空间 $\overset{m}{\wedge}V$ 中必有不可合元素. ▮

定理2.4 设 $v_1\wedge\cdots\wedge v_m=\sum\limits_{\omega\in Q_{m,n}}p(\omega)e_\omega^\wedge\neq0$,若 $p(\alpha)$

$\neq 0$，令

$$u_i=\sum_{j=1}^{n}p(\alpha[i,j])e_j,\quad i=1,\cdots,m,$$

则 $u_1\wedge\cdots\wedge u_m=p(\alpha)^{m-1}v_1\wedge\cdots\wedge v_m$，因而 $\langle u_1,\cdots,u_m\rangle=\langle v_1,\cdots,v_m\rangle$. 其中 $\alpha[i,j]=(\alpha(1),\cdots,\alpha(i-1),j,\alpha(i+1),\cdots,\alpha(m))\in\Gamma_{m,n}$.

证 令 $a_{ij}=p(\alpha[i,j])=p(\alpha(1),\cdots,\alpha(i-1),j,\alpha(i+1),\cdots,\alpha(m))$，由定理1.1有 $u^\wedge=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}\det A[1,\cdots,m|\omega]e_\omega^\wedge$. 但用定理 2.1 可得

$$\det A[1,\cdots,m|\omega]=\det(a_{i\omega(j)})=\det(p(\alpha[i,j:\omega]))$$
$$=p(\alpha)^{m-1}p(\omega),$$

代入即得 $u^\wedge=p(\alpha)^{m-1}v^\wedge$，再由 $p(\alpha)\neq 0$，$v^\wedge\neq 0$ 就得 $\langle u_1,\cdots,u_m\rangle=\langle v_1,\cdots,v_m\rangle$. ▌

用此定理来求可合元素所对应的子空间的基是很方便的. 例如由定理 2.3 知

$$z=e_1\wedge e_2\wedge e_3+2e_1\wedge e_2\wedge e_4-e_1\wedge e_3\wedge e_4-3e_2\wedge e_3\wedge e_4$$

是可合的. 我们不难求得 $u_1,u_2,u_3\in V$ 使 $z=u_1\wedge u_2\wedge u_3$. 事实上应用定理 2.4，令 $\alpha=(1,2,3)$ 这时 $p(\alpha)=1$ 立即可写出

$$u_1=p(1,2,3)e_1+p(2,2,3)e_2+p(3,2,3)e_3$$
$$+p(4,2,3)e_4=e_1-3e_4$$

类似地得 $u_2=e_2+e_4$，$u_3=e_3+2e_4$，于是 z 可写为可合元素形式

$$z=(e_1-3e_4)\wedge(e_2+e_4)\wedge(e_3+2e_4).$$

（定理 2.1 参看[35]，定理 2.2 与定理 2.4 参看[39]，定理 2.3 参看[15]）

练　习　2

1. 设$v_1\wedge\cdots\wedge v_m=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}p(\omega)e_\omega^\wedge\neq 0$，证明对任意$\alpha\in\Gamma_{m,n}$都有

$$u_i=\sum_{j=1}^{n}p(\alpha[i,j])e_j\in\langle v_1,\cdots,v_m\rangle,\quad i=1,\cdots,m.$$

2. 已知$z=3e_1\wedge e_2+5e_1\wedge e_3+5e_1\wedge e_4+e_2\wedge e_3-2e_2\wedge e_4+5e_3\wedge e_4$是可合元素，求$u_1,u_2\in V$使$z=u_1\wedge u_2$.

3. 设函数$p:\Gamma_{m,n}\to\mathbf{C}$不恒等于0且满足(1)，证明下面条件等价：

(a) $P(\alpha,\beta)P(\beta,\gamma)=p(\beta)P(\alpha,\gamma),\ \alpha,\beta,\gamma\in\Gamma_{m,n}$.

(b) $P(\alpha,\beta)P(\beta,\alpha)=p(\alpha)p(\beta)I_m,\quad \alpha,\beta\in\Gamma_{m,n}$.

(c) $$\sum_{t=1}^{m}p(\alpha[s,t:\beta])p(\beta[t,s:\alpha])=p(\alpha)p(\beta),$$
$$\alpha,\beta\in\Gamma_{m,n},\quad s=1,\cdots,m.$$

(d) $$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k-1}p(\alpha(\hat{i}):\delta(k))p(\delta(\hat{k}))=0,$$
$$\alpha\in\Gamma_{m,n},\quad \delta\in\Gamma_{m+1,n}.$$

其中　$\alpha(\hat{i}):\delta(k)=(\alpha(1),\cdots,\alpha(i-1),\alpha(i+1),\cdots,\alpha(m),\delta(k))\in\Gamma_{m,n}$,

$\delta(\hat{k})=(\delta(1),\cdots,\delta(k-1),\delta(k+1),\cdots,\delta(m+1))\in\Gamma_{m,n}$.

（提示：看文献[35]和[13]）

§3 完全对称张量空间

张量对称类中当 $G=S_m$，$\chi\equiv1$ 时是另一个重要的对称类，这时 $V_1(S_m)$也写为 $V^{(m)}$ 称为完全对称张量空 间，可合元素 v^* 写为 $v^{\cdot}=v_1\cdot\cdots\cdot v_m$.

对于 $A=(a_{ij})\in M_m$，与 A 的行列式相对应的是 A 的积和式

$$\operatorname{per}A=\sum_{\sigma\in S_m}\sum_{t=1}^{m}a_{t\sigma(t)}.$$

定理3.1 在 $V^{(m)}$ 中，设 $\dim V=n$，记 $\nu(\alpha)=|G_\alpha|$ ($G=S_m$)，则有

(a) $\Delta=\bar{\Delta}=\hat{\Delta}=G_{m,n}$，$\dim V^{(m)}=\binom{n+m-1}{m}$.

(b) 若$E=\{e_1,\cdots,e_n\}$是V的基，则$E.=\{e_\alpha^{\cdot}\mid\alpha\in G_{m,n}\}$是 $V^{(m)}$ 的基，若 E 是内积空间V 的规格化正交基，则$E_{\cdot}^{\prime}=\left\{\sqrt{\frac{m!}{\nu(\alpha)}}e_\alpha^{\cdot}\mid\alpha\in G_{m,n}\right\}$是 $V^{(m)}$ 的规格化正交基.

(c) 对于 $\sigma\in S_m$ 总成立 $v_\sigma^{\cdot}=v^{\cdot}$.

(d) $v_1\cdot\cdots\cdot v_m=0$ 的充要条件是某 $v_i=0$.

(e) 若 $v^{\cdot}=u^{\cdot}\neq0$，则存在 $\sigma\in S_m$ 及 $d_i\neq0$ 使得 $u_i=d_iv_{\sigma(i)}$，$i=1,\cdots,m$，且 $\prod_{i=1}^{m}d_i=1$.

(f) 若 $v_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j$，$i=1,\cdots,m$，则 $v^{\cdot}=\sum_{\alpha\in G_{m,n}}\frac{1}{\nu(\alpha)}\operatorname{per}A[1,\cdots,m\mid\alpha]e_\alpha^{\cdot}$.

证 (a)、(b)、(c)看第三章相应的定理和练习.

(d) 只需证明必要性. 在 V 上任意定义一个内积. 假定 $v_t\neq 0, t=1,\cdots,m$, 我们先证明定能找到 $w\in V$ 使 $\prod_{t=1}^{m}(w, v_t)\neq 0$. 当 $m=1$ 时是明显的, 取 $w=v_1$ 即可. 归纳假定对 $m-1$ 情形成立, 即能找到 u 使 $(u,v_t)\neq 0$, $t=1,\cdots,m-1$, 那么由 $v_m\neq 0$ 显然能找到数 a 使 $a(u, v_m)\neq\|v_m\|^2$ 且

$a\neq\dfrac{(v_m,v_t)}{(u,v_t)}, t=1,\cdots,m-1$. 令 $w=au-v_m$, 则 $(w,v_m)=a(u, v_m)-\|v_m\|^2\neq 0$, $(w,v_t)=a(u,v_t)-(v_m,v_t)\neq 0$, $t=1,\cdots, m-1$. 这就证明了必存在 $w\in V$ 使 $\prod_{t=1}^{m}(w,v_t)\neq 0$.

另一方面, 对任意 $w\in V$ 都有 $(w\otimes\cdots\otimes w, v^{\cdot})=(T(G, 1)w\otimes\cdots\otimes w, v^{\otimes})=(w\otimes\cdots\otimes w, v_1\otimes\cdots\otimes v_m)=\prod_{t=1}^{m}(w,v_t)$.

于是由 $v^{\cdot}=0$ 就有 $\prod_{t=1}^{m}(w,v_t)=0, \forall w\in V$, 这与前面矛盾, 故必有某 $v_t=0$.

(e) 由(d)的证明知, 若 $v^{\cdot}=u^{\cdot}\neq 0$, 则对任意的 $w\in V$ 都有

$$\prod_{t=1}^{m}(w,v_t)=\prod_{t=1}^{m}(w,u_t). \qquad (1)$$

我们分解 $u_t=x_t+y_t$ 使 $x_t\in\langle v_1\rangle$, $y_t\in\langle v_1\rangle^{\perp}, t=1,\cdots, m$. 那么对于任意的 $z\in\langle v_1\rangle^{\perp}$, 就有 $\prod_{t=1}^{m}(z,v_t)=0$, 于是由(1)有

$$0=\prod_{t=1}^{m}(z,u_t)=\prod_{t=1}^{m}(z,y_t), \quad \forall z\in\langle v_1\rangle^{\perp}.$$

现在对空间$\langle v_1\rangle^{\perp}$利用结论（d）就知必有某 $y_i=0$，也就是 $u_i=x_i\in\langle v_1\rangle$，故存在 $d_i\neq 0$ 使 $u_i=d_iv_1$.把它代入(1)式又得

$$0=(w,v_1)\left(\prod_{t=2}^{m}(w,v_t)-\bar{d}_i\prod_{t\neq i}(w,u_t)\right). \qquad (2)$$

由 $v_1\neq 0$ 及 w 是任意的，容易推出(2)式的第二个因子必恒等于0，而这个就成为(1)式中只有 $m-1$个因子相乘的情形，故用归纳法即得证明.

(f)由$$v^{\cdot}=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}e_j\right)\cdot\cdots\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}a_{mj}e_j\right)$$

$$=\sum_{\alpha\in\Gamma_{m,n}}\prod_{i=1}^{m}a_{i\alpha(i)}e_{\alpha}^{\cdot}$$

$$=\sum_{\alpha\in G_{m,n}}\frac{1}{\nu(\alpha)}\sum_{\sigma\in S_m}\prod_{i=1}^{m}a_{i\alpha\sigma(i)}e_{\alpha\sigma}^{\cdot}$$

（第三章定理4.3）

$$=\sum_{\alpha\in G_{m,n}}\frac{1}{\nu(\alpha)}\operatorname{per}A[1,\cdots,m|\alpha]e_{\alpha}^{\cdot}. \qquad \blacksquare$$

对于完全对称张量空间$V^{(m)}$，这时诱导算子$K(T)$写为$P_m(T)$，诱导矩阵写为$P_m(A)$.

$P_m(A)$自然也有类似于$K(A)$的性质，具体化如下：

定理3.2 设 $A\in M_n$，A的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则有

(a) 若$T\in L(V,V)$且$[T]_E^E=A$，E与$E^{\cdot}$同于定理3.1，则

$$\left([P_m(T)]_{E'}^{E'}\right)_{\alpha,\beta}=P_m(A)_{\alpha,\beta}=\frac{\operatorname{per}A[\alpha|\beta]}{\sqrt{\nu(\alpha)\nu(\beta)}}.$$

(b) $P_m(A^*)=P_m(A)^*, P_m(A^{-1})=P_m(A)^{-1}$,

$P_m(AB)=P_m(A)P_m(B)$.

(c) 若 $\rho(A)=r$，则 $\rho(P_m(A))=\binom{r+m-1}{m}$.

(d) 若 A 是上三角矩阵，则 $P_m(A)$也是.

(e) $P_m(A)$的特征值为$\prod_{t=1}^{m}\lambda_{\alpha(t)}$，$\alpha\in G_{m,n}$.

(f) $$\operatorname{tr}(P_m(A))=\sum_{\alpha\in G_{m,n}}\prod_{t=1}^{m}\lambda_{\alpha(t)}$$

$$=\sum_{\alpha\in G_{m,n}}\frac{1}{\nu(\alpha)}\operatorname{per}A[\alpha|\alpha].$$

(g) $\det P_m(A)=(\det A)^{\binom{n+m-1}{m}}$.

(h) 若 A 分别是规范的，厄米特的，正定的，非负定的，酉的，则$P_m(A)$也相应是. ▌

(本节定理可参看[12]和[26])

练 习 3

1. 证明积和式的 Cauchy-Binet 定理：对于 $A,B\in M_n$，$\alpha,\beta\in G_{m,n}$，有

$$\operatorname{per}(AB)[\alpha|\beta]=\sum_{\omega\in G_{m,n}}\frac{1}{\nu(\omega)}\operatorname{per}A[\alpha|\omega]\operatorname{per}B[\omega|\beta].$$

2. 证明积和式的 Laplace 展开式定理：对于 $A\in M_n$，$\alpha\in Q_{m,n}$，有

$$\operatorname{per}A=\sum_{\beta\in Q_{m,n}}\operatorname{per}A[\alpha|\beta]\operatorname{per}A(\alpha|\beta).$$

3. 设 G 是 S_m 的子群，检查定理 3.1 中那些性质在 $V_1(G)$ 中仍成立.

4. 证明集合 $\{\overbrace{v\otimes\cdots\otimes v}^{m}|v\in V\}$ 生成 $V^{(m)}$（即 $V_1(S_m)$）.（提示：可从 $m=2$ 开始考虑，也可参看[12，p.191]）

附录　群的表示和特征标

群表示理论在物理、化学和其它数学领域都有许多应用. 这个附录只列举本书第三章所需要的一些结论，主要是不可约表示和不可约特征标的正交理论.

§1 置　换　群

一个 $n\times n$ 的矩阵，如果它的每一行每一列除了一个元素是 1 外其余元素都是 0，则称为置换矩阵. 显然任一置换矩阵可写成 $(\delta_{i,\sigma(j)})$，其中 σ 是置换群 S_n 的某个置换，反之 S_n 的每一置换也对应着这样一个置换矩阵. 故 $\sigma\to(\delta_{i,\sigma(j)})$ 是个一一对应的，不难验证这个对应还是同态的，因为若令 $\varphi(\sigma)=(\delta_{i,\sigma(j)})$，则

$$(\varphi(\sigma)\varphi(\pi))_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\varphi(\sigma)_{ik}\varphi(\pi)_{kj}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\pi(j)}=\delta_{i,\sigma\pi(j)}=\varphi(\sigma\pi)_{ij},$$

即 $\varphi(\sigma\pi)=\varphi(\sigma)\varphi(\pi)$. 这说明置换群 S_n 与 n 阶置换矩阵群同构.

定理1.1 (Cayley) 任何 n 个元素的群 G 都与 S_n 的某一子群同构.

证　设 $G=\{\sigma_1,\cdots,\sigma_n\}$，对于 $\sigma\in G$，定义

$$Q(\sigma)=(\delta_{\sigma i,\sigma\sigma j})\in M_n$$

容易看出 $Q(\sigma)$是个 n 阶置换矩阵，而且 $Q(\sigma)=Q(\pi)$ 当且仅当 $\sigma=\pi$. 因此我们只需证明 Q 是个同态，但这和前面是类似的，即有

$$\begin{aligned}(Q(\sigma)Q(\pi))_{ij}&=\sum_{k=1}^{n}Q(\sigma)_{ik}Q(\pi)_{kj}\\&=\sum_{k=1}^{n}\delta_{\sigma i,\sigma\sigma k}\delta_{\sigma k,\pi\sigma j}=\delta_{\sigma i,\sigma\pi\sigma j}=Q(\sigma\pi)_{ij}.\end{aligned}$$ ▌

由此定理，我们以后常认为有限群 G 就是某置换群的子群.

对于$\sigma\in S_n$,如果存在不大于 n 的 k 个正整数 $i_1,\cdots,i_k$使得

$$\begin{cases}\sigma(i_t)=i_{t+1}, & t=1,\cdots,k-1,\\ \sigma(i_k)=i_1 & \\ \sigma(i)=i, & \text{对于其余的正整数}i,\end{cases}$$

则称 σ 为长度 k 的循环置换，并表示为 $\sigma=(i_1\cdots i_k)$.

两个循环置换$(i_1\cdots i_k)$，$(j_1\cdots j_m)$如果没有共同的正整数则称为不相交的. 显然不相交的两个循环置换的乘积是可交换的.

由循环置换的定义有 $i_t=\sigma(i_{t-1})=\sigma^2(i_{t-2})=\cdots=\sigma^{t-1}(i_1)$，$t=2,\cdots,k$. 这样长度为 k 的循环置换 σ 又可写为 $(i_1\ \sigma(i_1)\cdots\sigma^{k-1}(i_1))$.

另一方面，对于任意置换 $\sigma\in S_n$ 和不大于 n 的正整数 i，必存在正整数 k 使$\sigma^k(i)=i$，假定 k 是这种正整数中最小的，则$(i\ \sigma(i)\cdots\sigma^{k-1}(i))$可构成一个循环置换，当然它不一定等于 σ.

定理1.2 S_n的每一置换σ可表示为不相交的循环置换的乘积.

证 任取一个不大于n的正整数i，则存在最小的正整数r使$\sigma^r(i)=i$. 若$r=n$，则循环置换$(i\ \sigma(i)\cdots\sigma^{r-1}(i))$就是$\sigma$. 不然的话就有不大于$n$的正整数$j\notin\{i, \sigma(i), \cdots, \sigma^{r-1}(i)\}$，于是又存在最小的正整数$s$使$\sigma^s(j)=j$. 显然循环置换$(j\ \sigma(j)\cdots\sigma^{s-1}(j))$与前面的循环置换是不相交的，继续下去即得$\sigma=(i\ \sigma(i)\cdots\sigma^{r-1}(i))(j\ \sigma(j)\cdots\sigma^{s-1}(j))\cdots(k\ \sigma(k)\cdots\sigma^{t-1}(k))$. ▎

容易验证一个置换σ分解为不相交的循环置换的乘积是唯一的（不算因子次序），这种分解中的循环置换的个数通常用$c(\sigma)$表示（这里包括长度为1的循环置换）. 例如

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 2 & 5 & 1 & 7 & 3 & 6 & 4\end{pmatrix}=(1\ 2\ 5\ 3)\ (4\ 7)\ (6)=$$

$(1\ 2\ 5\ 3)(4\ 7)$，则$c(\sigma)=3$.

练 习 1

1. 长度为2的循环置换$(i_1\ i_2)$称为对换，证明S_n中的任一置换可表示为若干个对换的乘积.

（提示：$(i_1\cdots i_k)=(i_1\ i_2)(i_2\ i_3)\cdots(i_{k-1}\ i_k)$）

2. 证明S_n由对换$(1\ 2), (2\ 3), \cdots, (n-1\ n)$生成.

3. 把下列循环置换的乘积表示为不相交的循环置换的乘积.

(i) $(a\ b)\ (a\ i_1\cdots i_r\ b\ j_1\cdots j_s)$

(ii) $(a\ b)\ (a\ i_1\cdots i_r\ b\ j_1\cdots j_s)(a\ b)$

(iii) $(a\ b)(a\ i_1\cdots i_r)$

(iv) $(a\ b)(a\ i_1\cdots i_r)(a\ b)$

4. 把$\sigma=(2\ 4)(1\ 2\ 3\ 4)(3\ 4)(3\ 5\ 6)(5\ 6)\in S_7$表示为不相交的循环置换的乘积并求$c(\sigma)$.

§2 群的表示

设V是n维复向量空间，我们用$GL_n(V)$表示从V到V的所有可逆线性算子，GL_n则表示所有n阶可逆复矩阵．显然$GL_n(V)$与GL_n是同构的两个群，通常称之为一般线性群.

群G的一个n阶算子表示是一个同态$T:G\to GL_n(V)$，即$T(\sigma_1\sigma_2)=T(\sigma_1)T(\sigma_2)$，对所有$\sigma_1,\sigma_2\in G$．由此定义，若$e$是$G$的单位元，$I$是$GL_n(V)$的单位元，则$T(e)=I$，这是因为$T(e)$是可逆的且有$T(e)=T(e^2)=T(e)T(e)$．也有$T(\sigma^{-1})=T(\sigma)^{-1}$，$\sigma\in G$.

类似地一个同态对应$A:G\to GL_n$则称为群G的n阶矩阵表示．自然也有$A(\sigma_1\sigma_2)=A(\sigma_1)A(\sigma_2)$，$A(e)=I_n$，$A(\sigma^{-1})=A(\sigma)^{-1}$.

若A是群G的n阶矩阵表示，又$P\in GL_n$，令$B(\sigma)=P^{-1}A(\sigma)P$，则$B$显然也是群$G$的$n$阶矩阵表示.

假定A,B是群G的两个n阶矩阵表示，若存在$P\in GL_n$使$B(\sigma)=P^{-1}A(\sigma)P$对一切$\sigma\in G$（即所有表示矩阵一致相似），则称群$G$的矩阵表示$A$和$B$是等价的.

设E是V的一组有序基，$T:G\to GL_n(V)$是群G的算子表示，令$A(\sigma)=[T(\sigma)]_E^E$，显然$A(\sigma)\in GL_n$且$A(\sigma_1\sigma_2)$

$=[T(\sigma_1\sigma_2)]_E^E=[T(\sigma_1)T(\sigma_2)]_E^E=[T(\sigma_1)]_E^E\ [T(\sigma_2)]_E^E=$ $A(\sigma_1)A(\sigma_2)$. 故 A 是群 G 的一个 n 阶矩阵表示. 如果 F 是 V 的另一组有序基, 令 $B(\sigma)=[T(\sigma)]_F^F$, 当然 B 也是群 G 的一个 n 阶矩阵表示, 而且 $B(\sigma)=[T(\sigma)]_F^F=[I]_E^F$ $\cdot[T(\sigma)]_E^E[I]_F^E=([I]_F^E)^{-1}A(\sigma)[I]_F^E$. 故群 G 的同一算子表示由不同基诱导的矩阵表示是等价的, 因而也可以说群 G 的所有等价的矩阵表示是由同一算子表示诱导出的.

类似地, 群 G 的算子表示 $T:G\to GL_n(V)$ 与 $S:G\to GL_n(W)$ 称为等价的, 如果存在可逆的 $L\in L(V,W)$ 使 $T(\sigma)=L^{-1}S(\sigma)L,\sigma\in G$. 显然群 G 的等价的算子表示可适当选取基使它们诱导为同一个矩阵表示.

我们将同时讨论群的这两种表示, 以便于利用它们各自的特点. 另一方面因为由一种表示得的结论很容易推到另一种表示上去, 故我们以后又常常不区分它们而简称为群的表示.

下面是群表示的一些简单例子.

(a) $\sigma\to 1$ 是群 G 的主表示(1阶).

(b) $\sigma\to\varepsilon(\sigma)$ 是置换群 S_n 的1阶表示($\varepsilon(\sigma)$ 表示置换 σ 的符号).

(c) $\sigma\to I_n$ 是群 G 的 n 阶表示.

(d) $\sigma\to(\delta_{i\sigma(j)})\in M_n$ 是群 S_n 的 n 阶表示.

(e) $\sigma\to Q(\sigma)$(看定理1.1)是 n 元群 G 的 n 阶矩阵表示, 称为群 G 的正则表示.

(f) S_3 有6个元素, 它们可写为循环置换的形式: $e,(2\ 3),(1\ 2),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2),(1\ 3)$. 让它们顺序

对应于 2 阶矩阵$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}$. 容易验明这是个同态对应因而是 S_3 的 2 阶表示.

群 G 的 n 阶矩阵表示A称为可约的，如果存在$P\in GL_n$，使

$$P^{-1}A(\sigma)P=\begin{pmatrix}A_1(\sigma)&0\\C(\sigma)&A_2(\sigma)\end{pmatrix},\quad \forall\sigma\in G,\qquad (1)$$

其中 $A_1(\sigma)$，$A_2(\sigma)$分别是 m 阶和 $n-m$ 阶方阵且 $1\leqslant m<n$. 如果存在 P 能同时使(1)中的 $C(\sigma)=0$，$\forall\sigma\in G$，则称 A 为完全可约的. 如果 A 不是可约的则称为既约的或不可约的.

设群 G 的矩阵表示 A 可约，有形式(1)，则 $A_1(\sigma)$，$A_2(\sigma)$显然都是可逆方阵，且由 $A(\sigma\pi)=A(\sigma)A(\pi)$，就有

$$\begin{pmatrix}A_1(\sigma\pi)&0\\C(\sigma\pi)&A_2(\sigma\pi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1(\sigma)&0\\C(\sigma)&A_2(\sigma)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1(\pi)&0\\C(\pi)&A_2(\pi)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}A_1(\sigma)A_1(\pi)&0\\C(\sigma)A_1(\pi)+A_2(\sigma)C(\pi)&A_2(\sigma)A_2(\pi)\end{pmatrix},\qquad (2)$$

故 $A_1(\sigma\pi)=A_1(\sigma)A_1(\pi)$，$A_2(\sigma\pi)=A_2(\sigma)A_2(\pi)$. 这说明若 A可约，则 A 可分解为群 G 的两个低阶矩阵表示 A_1 与A_2.

群 G 的 n 阶算子表示 T 称为可约的，如果在任一组基下它的诱导矩阵表示是可约的.

由定义知群G的任何一阶表示都是不可约的，故例(a)，

(b)都是不可约的，也容易看出，群 G 的等价表示具有相同的可约性.

下面是算子表示可约性的一个判断准则.

定理2.1 群 G 的算子表示 $T:G\to GL_n(V)$ 为可约的充要条件是存在 V 的非平凡子空间 W，使 W 对于 $T(\sigma)$ 是不变的.（即 $T(\sigma)w\in W$，$\forall w\in W,\sigma\in G$）

证 由 T 可约就存在 V 的基 $E=\{e_1,\cdots,e_m,e_{m+1},\cdots,e_n\}$，$1\leqslant m<n$，使

$$[T(\sigma)]_E^E=\begin{pmatrix}A_1(\sigma) & 0\\ C(\sigma) & A_2(\sigma)\end{pmatrix},\quad \forall\sigma\in G,$$

其中 $A_1(\sigma)\in M_m,A_2(\sigma)\in M_{n-m}$. 显然这时 $\langle e_{m+1},\cdots,e_n\rangle$ 是 $T(\sigma)$的非平凡不变子空间. 反之若 $T(\sigma)$ 有非平凡不变子空间 W，则可选取 V 的基 F，使 W 的基为其最后部分，这样 $[T(\sigma)]_F^F$ 就有形式(1)，因而 T是可约的. ▎

下面是一个不太明显的结论，有了它可使可约表示有更简单的形式.

定理2.2 (Maschke) 设 A 是有限群 G 的 n 阶矩阵表示，若 A 是可约的，则 A 是完全可约的.

证 由 A 可约，故可假定

$$A(\sigma)=\begin{pmatrix}A_1(\sigma) & 0\\ C(\sigma) & A_2(\sigma)\end{pmatrix},\quad \forall\sigma\in G,$$

其中 $A_1(\sigma)\in M_m,A_2(\sigma)\in M_{n-m}$.

令
$$P=\begin{pmatrix}I_m & 0\\ Q & I_{n-m}\end{pmatrix},\quad 则\ P^{-1}=\begin{pmatrix}I_m & 0\\ -Q & I_{n-m}\end{pmatrix},$$

其中 $Q\in M_{n-m,m}$ 待定. 于是

$$P^{-1}A(\sigma)P=\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -Q & I_{n-m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1(\sigma) & 0 \\ C(\sigma) & A_2(\sigma) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ Q & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_1(\sigma) & 0 \\ C(\sigma)-QA_1(\sigma)+A_2(\sigma)Q & A_2(\sigma) \end{pmatrix} \tag{3}$$

现在由(2)得

$$C(\sigma\pi)=C(\sigma)A_1(\pi)+A_2(\sigma)C(\pi)$$

注意到$A_1(\pi)$是可逆方阵，就有

$$C(\sigma)=C(\sigma\pi)A_1(\pi)^{-1}-A_2(\sigma)C(\pi)A_1(\pi)^{-1}$$
$$=C(\sigma\pi)A_1(\sigma\pi)^{-1}A_1(\sigma)-A_2(\sigma)C(\pi)A_1(\pi)^{-1}$$

两边对π求和就得

$$|G|C(\sigma)=\left(\sum_{\pi\in G}C(\sigma\pi)A_1(\sigma\pi)^{-1}\right)A_1(\sigma)-A_2(\sigma)$$

$\cdot\left(\sum_{\pi\in G}C(\pi)A_1(\pi)^{-1}\right)$，故若令$Q=\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}C(\pi)A_1(\pi)^{-1}$则得

$$C(\sigma)-QA_1(\sigma)+A_2(\sigma)Q=0,\quad \forall\sigma\in G,$$

代入(3)式即得A是完全可约的. ▮

定理2.3 有限群G的任何n阶矩阵表示A等价于若干个不可约矩阵表示的直和，即存在$P\in GL_n$，使

$$P^{-1}A(\sigma)P=\begin{pmatrix} A_1(\sigma) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2(\sigma) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k(\sigma) \end{pmatrix},\quad \forall\sigma\in G.$$

其中$A_1,\cdots,A_k$都是群G的不可约表示.

证 利用定理2.2及简单的归纳法即可. ▮

练 习 2

1. 证明 S_3 的 3 阶表示 $\sigma \to (\delta_{i\sigma(j)}) \in M_3$ 是可约的. (提示：找 1 维不变子空间)

2. 证明例(f)中 S_3 的 2 阶表示是不可约的.

3. 假定 $T: G \to GL_n(V)$ 是有限群 G 的表示，证明可在 V 上定义一个内积 $(\ ,\ )$，使 $T(\sigma)$ 都是酉的. 即对于任意 $v, u \in V, \sigma \in G$，有 $(T(\sigma)v, T(\sigma)u) = (v, u)$.

(提示：先在 V 上定义一个内积 $[\ ,\ ]$，则所需内积为

$$(v,u)=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}[T(\sigma)v,T(\sigma)u].)$$

4. 证明有限群 G 的任何 n 阶矩阵表示都等价于酉矩阵表示.

§3 不可约表示

上一节我们对群的表示进行了分类，特别是知道有限群的任何 n 阶表示等价于若干个不可约表示的直和. 现在我们来研究不可约表示的一些深刻性质. 先从著名的 Schur引理开始.

定理3.1 (Schur 引理) 设 $T: G \to GL_n(V)$，$S: G \to GL_m(W)$ 是群 G 的两个不可约表示，若存在非零的 $L \in L(V, W)$，使得 $LT(\sigma) = S(\sigma)L$ 对所有 $\sigma \in G$ 都成立，则 L 是可逆的，因而 T 与 S 是等价的.

证 回忆$\mathrm{Im}L=\{Lv|v\in V\}\subset W$，$\ker L=\{v\in V|Lv=0\}\subset V$及$\dim(\mathrm{Im}L)+\dim(\ker L)=\dim V$. 由$L\neq 0$知$\mathrm{Im}L\neq\{0\}$，$\ker L\neq V$. 对于任意$v\in V$，由$S(\sigma)Lv=LT(\sigma)v\in\mathrm{Im}L$知$\mathrm{Im}L$是$S(\sigma)$的不变子空间，但$S$是不可约的，由定理2.1知$\mathrm{Im}L$是$W$的平凡子空间，故$\mathrm{Im}L=W$.类似地$\ker L$是$T(\sigma)$的不变子空间，由$T$不可约又得$\ker L=\{0\}$. 合起来即得$\dim(\mathrm{Im}L)=\dim W=\dim V$，故$L$是可逆的，因而$T$与$S$是等价的. ▎

由群的算子表示与矩阵表示的关系很容易把此结论化为矩阵表示的形式：

定理3.2 设A,B分别是群G的n阶和m阶不可约矩阵表示，若存在非零矩阵$M\in M_{m,n}$，使得$MA(\sigma)=B(\sigma)M$对所有$\sigma\in G$都成立，则M是可逆方阵，因而A与B是等价的. ▎

这定理对于$A=B$的情形则有如下的结论.

定理3.3 设$A:G\to GL_n$是不可约表示，M是n阶方阵，若$MA(\sigma)=A(\sigma)M$对所有$\sigma\in G$都成立，则$M=cI_n$.

证 取M的任一特征值c，则$M-cI_n$是不可逆的. 但显然有$(M-cI_n)A(\sigma)=A(\sigma)(M-cI_n)$，由上定理即得$M-cI_n=0$. ▎

由上面两个定理可推得群表示的有重要应用的性质，这就是有限群的矩阵表示的元素存在许多“正交关系”.

定理3.4 假定A是有限群G的n阶不可约矩阵表示，写$A(\sigma)=(a_{ij}(\sigma))\in M_n$，那么

$$\sum_{\sigma\in G}a_{is}(\sigma^{-1})a_{tj}(\sigma)=\frac{|G|}{n}\delta_{ij}\delta_{st}. \qquad (1)$$

如果 B 是不等价于 A 的 m 阶不可约矩阵表示，$B(\sigma)=(b_{ij}(\sigma))\in M_m$，则

$$\sum_{\sigma\in G}a_{ts}(\sigma^{-1})b_{tj}(\sigma)=0 \tag{2}$$

证 对任意的 $M\in M_{n,m}$，令

$$\varphi(M)=\sum_{\sigma\in G}A(\sigma^{-1})MB(\sigma),$$

则对任意的 $\pi\in G$，有

$$A(\pi)\varphi(M)=\sum_{\sigma\in G}A(\pi\sigma^{-1})MB(\sigma)$$

$$=\sum_{\tau\in G}A(\tau^{-1})MB(\tau\pi)=\varphi(M)B(\pi).$$

于是若 A 不等价于 B 则由定理 3.2 得 $\varphi(M)=0$；若$A=B$ 则由定理 3.3 知 $\varphi(M)=c_M I_n$.

现在我们取 $M=E_{st}$，这是 $M_{n,m}$ 中 (s,t) 位置元素是 1 其余元素是 0 的矩阵. 计算 $\varphi(E_{st})$的(i,j)位置元素就有

$$\varphi(E_{st})_{ij}=\sum_{\sigma\in G}(A(\sigma^{-1})E_{st}B(\sigma))_{ij}$$

$$=\sum_{\sigma\in G}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}A(\sigma^{-1})_{ip}(E_{st})_{pq}B(\sigma)_{qj}$$

$$=\sum_{\sigma\in G}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}a_{ip}(\sigma^{-1})\delta_{sp}\delta_{tq}b_{qj}(\sigma)$$

$$=\sum_{\sigma\in G}a_{is}(\sigma^{-1})b_{tj}(\sigma). \tag{3}$$

故若 A 不等价于 B，由 $\varphi(E_{st})=0$，即得(2). 若$A=B$，由 $\varphi(E_{st})=c_{st}I_n$ (c_{st} 为待定的数) 得 $\varphi(E_{st})_{ij}=c_{st}\delta_{ij}$，于是(3)式化为

$$c_{st}\delta_{ij}=\sum_{\sigma\in G}a_{is}(\sigma^{-1})a_{tj}(\sigma). \tag{4}$$

在(4)两边取 $j=i$ 并对 i 求和就得

$$nc_{st}=\sum_{\sigma\in G}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ti}(\sigma)a_{is}(\sigma^{-1})\right)=\sum_{\sigma\in G}(A(\sigma)A(\sigma^{-1}))_{ts}$$

$$=\sum_{\sigma\in G}(I_n)_{ts}=|G|\delta_{st}.$$

因此 $c_{st}=\frac{|G|}{n}\delta_{st}$，代入(4)式即得(1). ▎

下面是定理3.4的一个重要推广.

定理3.5 假定$A(\sigma)=(a_{ij}(\sigma))$，$B(\sigma)=(b_{ij}(\sigma))$分别是有限群 G 的 n 阶和 m 阶不可约矩阵表示，则对任意 $\pi\in G$ 有

$$\sum_{\sigma\in G}a_{is}(\sigma^{-1})b_{tj}(\sigma\pi)=\begin{cases}\frac{|G|}{n}a_{ij}(\pi)\delta_{st}, & \text{如果}A=B\\ 0, & \text{如果}A\text{不等价于}B.\end{cases}$$

证 在(1)的两边乘以 $a_{jk}(\pi)$并对 j 求和就有

$$\sum_{\sigma\in G}a_{is}(\sigma^{-1})\sum_{j=1}^{n}a_{tj}(\sigma)a_{jk}(\pi)=\frac{|G|}{n}\delta_{st}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}a_{jk}(\pi),$$

这就是$\sum_{\sigma\in G}a_{is}(\sigma^{-1})a_{tk}(\sigma\pi)=\frac{|G|}{n}a_{ik}(\pi)\delta_{st}$.

类似地在(2)的两边乘以 $b_{jk}(\pi)$然后对 j 求和即得定理的第二部分. ▎

有限群 G 的矩阵表示的每一个元素可看作是 G 上的一个函数，也可看作是一个$|G|$维向量. 下面定理叙述的性质

也是与表示的不可约性密切联系的.

定理3.6 设$A(\sigma)=(a_{ij}(\sigma))$是有限群$G$的$n$阶不可约矩阵表示，则$n^2$个函数$a_{ij}:G\to \mathbf{C}$是线性无关的.

证 假定有$c_{ij}\in \mathbf{C}$使得

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}a_{ij}(\sigma)=0\text{，对所有 }\sigma\in G.$$

那么两边乘以$a_{pq}(\sigma^{-1})$并对σ求和，利用定理3.3就得

$$0=\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\sum_{\sigma\in G} a_{pq}(\sigma^{-1})a_{ij}(\sigma)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\delta_{pj}\delta_{qi}\frac{|G|}{n}=\frac{|G|}{n}c_{qp}. \qquad \blacksquare$$

练 习 3

1. 证明可换群（阿贝尔群）的不可约表示都是1阶的.

2. 假定A是有限群G的n阶不可约表示，证明$n^2\leqslant |G|$.

3. 假定$A_1(\sigma)=(a_{ij}^1(\sigma)),\cdots,A_r(\sigma)=(a_{ij}^r(\sigma))$是有限群$G$的$r$个阶为$n_1,\cdots,n_r$的两两不等价的不可约矩阵表示，证明$\sum_{t=1}^{r} n_t^2$个函数$a_{ij}^t:G\to \mathbf{C}$是线性无关的,且$\sum_{t=1}^{r} n_t^2\leqslant |G|$.

§4 群的特征标

这一节我们要引入群表示论的另一重要概念，群表示的

特征标或称群的特征标.

设 A 是群 G 的表示（算子或矩阵表示），令 $\chi(\sigma)=\mathrm{tr}(A(\sigma))$，$\sigma\in G$，则 $\chi:G\to\mathbf{C}$ 称为群 G的由表示A提供的特征标，若 A 是不可约的，则 χ 称为不可约特征标.

因为算子或矩阵经过相似变换后迹不变，所以群G 的等价表示有相同的特征标．这表明群表示的特征标不依赖于基的选择．另一方面我们知道不相似的算子或矩阵可以有相同的迹，那么不等价的表示会不会有相同的特征标呢？我们马上就会看到特征标相同的表示一定是等价的，而且只从特征标就能判断所对应的表示是否不可约．这就使得群的特征标在群表示的研究中起着重要的作用.

若 A 是 n 阶表示，则 χ 称为 n 阶特征标．因为 $\chi(e)=\mathrm{tr}(A(e))=\mathrm{tr}(I_n)=n$，故 $\chi(e)$是特征标χ的阶.

任何群都有主表示 $\sigma\to1$，因而也有主特征标，就是 $\chi\equiv1$.

也有

$$\chi(\pi^{-1}\sigma\pi)=\mathrm{tr}(A(\pi^{-1}\sigma\pi))=\mathrm{tr}(A(\pi)^{-1}A(\sigma)A(\pi))$$
$$=\mathrm{tr}(A(\sigma))=\chi(\sigma).$$

故群的特征标在共轭类里取相同的值．所谓群 G 的包含 σ的共轭类是如下的集合，记作

$$[\sigma]=\{\pi^{-1}\sigma\pi\mid\pi\in G\}.$$

现在我们先从群的不可约矩阵表示的“正交关系”来推出不可约特征标的相应关系.

定理4.1（第一类正交关系）假定 χ,μ 是有限群 G的不可约特征标，则

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\mu(\sigma^{-1})=\begin{cases}1, & \text{如果}\chi=\mu\\ 0, & \text{如果}\chi\neq\mu\end{cases} \tag{1}$$

证 设 χ 和 μ 是由不可约矩阵表示 A 和 B 分别提供的，那么(1)的左边就等于

$$\frac{1}{|G|}\sum_{i,j}\sum_{\sigma\in G}a_{ii}(\sigma)b_{jj}(\sigma^{-1}). \tag{2}$$

因为若 A 不等价于 B，由定理 3.4 即得(2)式为0，而 $\chi\neq\mu$ 自然有 A 不等价于 B，从而 $\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)(\mu\sigma^{-1})=0$；当 $\chi=\mu$ 时，这时 χ,μ 可看作是由同一表示 A 提供的，设 A 是 n 阶的，再用定理 3.4 就得(2)式等于 $\frac{1}{|G|}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{|G|}{n}\delta_{ij}=1$. ▌

注意，这里也顺便证明了不等价的不可约表示不能有相同的特征标.

下面是定理 4.1 的一个有用推广.

定理4.2 设 χ,μ 是有限群 G 的不可约特征标，则对任意 $\pi\in G$ 有

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})\mu(\sigma\pi)=\begin{cases}\frac{\chi(\pi)}{\chi(e)}, & \text{如果}\chi=\mu\\ 0, & \text{如果}\chi\neq\mu.\end{cases}$$

证 类似于定理 4.1 的证明，应用定理 3.5 即得. ▌

定理4.3 设 χ 是有限群 G 的特征标，则

$$\chi(\sigma^{-1})=\overline{\chi(\sigma)}, \text{对所有 } \sigma\in G.$$

证 由练习 2.4，$\chi(\sigma)$ 可看作是由酉矩阵 $A(\sigma)$ 提供的，于是 $A(\sigma^{-1})=A(\sigma)^{-1}=A(\sigma)^{*}$. 故有

$$\chi(\sigma^{-1})=\mathrm{tr}(A(\sigma^{-1}))=\mathrm{tr}(A(\sigma)^*)=\overline{\mathrm{tr}(A(\sigma))}=\overline{\chi(\sigma)}. \quad \blacksquare$$

这里要注意，当χ是1阶特征标时有$\chi(\sigma^{-1})=\chi(\sigma)^{-1}$，当$\chi$不是1阶特征标时，这等式一般不成立.

为了进一步研究有限群的特征标，我们引进类函数空间及其内积.

假定$[\sigma]$，$[\theta]$分别是G中包含σ和θ的两个共轭类，由定义容易看出或者$[\sigma]=[\theta]$或者$[\sigma]$与$[\theta]$没有公共元素，故有限群G可分为有限个不相交的共轭类.

使用通常的加法和数乘，所有函数$f:G\to\mathbf{C}$构成一个向量空间W，显然$\dim W=|G|$. 如果函数f在每个共轭类里取值相同则称为类函数. 由前面知道群的特征标就是一种类函数. 所有类函数构成向量空间W的子空间称为类函数空间，显然它的维数就是群G的共轭类个数.

现在我们在W内定义一个内积，对于$f,g\in W$，容易验证

$$(f,g)=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}f(\sigma)\overline{g(\sigma)}$$

是一个内积，有时写为$(f,g)_G$. 自然它也是类函数空间上的内积.

按此定义对照定理4.1和定理4.3知有限群G的所有不等价的不可约表示的特征标是规格化正交的，因而是线性无关的. 这表明有限群G的不相同的不可约特征标的个数是有限的（显然它不能超过群G的共轭类个数，稍后证明这两数相等）. 若记有限群G的全部不可约特征标为

$$I(G)=\{\chi_1,\cdots,\chi_k\},$$

则定理4.1可写为

$$(\chi_i,\chi_j)=\delta_{ij},\quad i,j=1,\cdots,k. \qquad (3)$$

现在我们来证明这节开头提出的结论.

定理4.4 假定 A,B 是有限群 G 的两个表示，则 A 与 B 等价的充要条件是其特征标相等，即 $\chi_A=\chi_B$.

证 只需证明充分性. 不妨假定为矩阵表示，根据定理2.3，A,B 分别等价于不可约表示的直和，故可写为

$$A(\sigma)=\begin{pmatrix} A_1(\sigma) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2(\sigma) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_l(\sigma) \end{pmatrix},$$

$$B(\sigma)=\begin{pmatrix} B_1(\sigma) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2(\sigma) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_m(\sigma) \end{pmatrix}.$$

在 $A_1,\cdots,A_l$, $B_1,\cdots,B_m$ 中，所有两两不等价的记为 $D_1,\cdots,D_t$. 设 D_i 的特征标为 χ_i，又设 $A_1,\cdots,A_l$ 中有 r_i 个等价于 D_i；而 $B_1,\cdots,B_m$ 中有 s_i 个等价于 D_i，$i=1,\cdots,t$. 于是有

$$\chi_A(\sigma)=\mathrm{tr}\left(\sum_{i=1}^{l}A_i(\sigma)\right)=\sum_{i=1}^{t}r_i\,\mathrm{tr}(D_i(\sigma))$$

$$=\sum_{i=1}^{t}r_i\chi_i(\sigma). \qquad (4)$$

类似地有 $\chi_B(\sigma)=\sum_{i=1}^{t}s_i\chi_i(\sigma)$. 由 $\chi_A=\chi_B$ 就得

$$\sum_{i=1}^{t}(r_i-s_i)\chi_i(\sigma)=0.$$

因为 $\chi_1,\cdots,\chi_t$ 是线性无关的，故有 $r_i=s_i, i=1,\cdots,t$. 这就表明 A 与 B 的直和分解中的不可约块个数是相等的且可排成对应等价，因而 A 与 B 是等价的. ▎

从这定理的证明过程（(4)式）立即可以得到一般特征标的一个构造性结论.

定理4.5 设 $\chi_1,\cdots,\chi_k$ 是有限群 G 的全部不可约特征标，则 $\chi:G\to\mathbf{C}$ 是群 G 的一个特征标的充要条件是存在非负整数 $m_1,\cdots,m_k$ 使 $\chi=\sum_{i=1}^{k}m_i\chi_i$. ▎

下面的定理说明仅由特征标就能判断所对应的表示是否不可约.

定理4.6 有限群 G 的特征标 χ 为不可约的充要条件是 $(\chi,\chi)=1$.

证 设 χ 是由表示 A 提供的，由上定理有

$$\chi=\sum_{i=1}^{k}m_i\chi_i$$

又由不可约特征标是规格化正交的就得

$$(\chi,\chi)=\left(\sum_{i=1}^{k}m_i\chi_i,\ \sum_{i=1}^{k}m_i\chi_i\right)=\sum_{i=1}^{k}m_i^2.$$

因为表示 A 为不可约的充要条件是 A 只能直和分解为1块，即某个 m_i 是1其余是0，故特征标 χ 为不可约的充要条件是 $(\chi,\chi)=1$. ▎

有限群 G 有一种重要的矩阵表示，它包含了群 G 的全部不可约表示（在等价意义下），因而也包含了全部的不可约特征标，这就是正则表示 Q，它是我们在定理1.1中介绍过

的．现在我们来研究它的特征标构造．

n 元群 G 的元素记为 $G=\{\sigma_1,\cdots,\sigma_n\}$，其正则表示 $Q:G\to GL_n$ 定义为 $Q(\sigma)_{ij}=\delta_{\sigma_i,\sigma\sigma_j}$．我们已经证明过 Q 是个同态因而是群 G 的 n 阶表示，记 Q 提供的特征标为 χ_Q，就有

$$\chi_Q(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}Q(\sigma)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\delta_{\sigma_i,\sigma\sigma_i}=\begin{cases}|G|(=n), & \text{当}\sigma=e\\ 0, & \text{当}\sigma\neq e\end{cases}\tag{5}$$

又由定理 4.5，χ_Q 可分解为 $\chi_Q=\sum_{i=1}^{k}m_i\chi_i$，其中 $\chi_1,\cdots,\chi_k$ 为群 G 的全部不可约特征标．于是用(3)和(5)就得

$$m_i=(\chi_Q,\chi_i)=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi_Q(\sigma)\overline{\chi_i(\sigma)}=\chi_i(e).$$

故正则表示的特征标有分解式

$$\chi_Q=\sum_{i=1}^{k}\chi_i(e)\chi_i.\tag{6}$$

这就是说群 G 的每个不可约特征标 χ_i 都在正则表示的特征标中出现，而其出现的次数（称为重复度）恰好等于 χ_i 的阶数．由此我们又得到群的阶和不可约特征标的阶的如下重要关系．

定理4.7 设 $I(G)=\{\chi_1,\cdots,\chi_k\}$是有限群 G 的全部不可约特征标，则

$$|G|=\sum_{i=1}^{k}\chi_i(e)^2=\sum_{\chi\in I(G)}\chi(e)^2.$$

证 利用(5)和(6)即得$|G|=\chi_Q(e)=\sum_{i=1}^{k}\chi_i(e)^2$． ∎

最后我们来讨论特征标的第二类正交关系，为此我们先

证明如下定理.

定理4.8 有限群 G 的全部不可约特征标个数等于群 G 的共轭类个数.

证 因为类函数空间的维数等于共轭类个数，又所有不可约特征标都是类函数而且线性无关，故我们只需证明任一类函数可用不可约特征标线性表示即可.

设 $I(G)=\{\chi_1,\cdots,\chi_k\}$ 且提供 χ_t 的不可约表示为 $A_t(\sigma)=(a_{ij}^t(\sigma))$，记 $\chi_t(e)=n_t$，由上定理有 $|G|=\sum_{t=1}^{k}n_t^2$. 又由练习 3.3 知 $|G|$ 个函数 a_{ij}^t 是线性无关的，但从 G 到 $\mathbf{C}$ 的函数组成的空间 W 的维数是 $|G|$，故 $\{a_{ij}^t|i,j=1,\cdots,n_t,t=1,\cdots,k\}$ 是 W 的一组基.

现假定 f 是任意一个类函数，则 f 可用 a_{ij}^t 线性表示，即

$$f(\sigma)=\sum_{t=1}^{k}\sum_{i,j=1}^{n_t}c_{ij}^t a_{ij}^t(\sigma),\forall\sigma\in G.$$

由类函数性质就有

$$\begin{aligned}
f(\sigma)=f(\pi^{-1}\sigma\pi)&=\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}f(\pi^{-1}\sigma\pi)\\
&=\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\sum_{t=1}^{k}\sum_{i,j=1}^{n_t}c_{ij}^t a_{ij}^t(\pi^{-1}\sigma\pi)\\
&=\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\sum_{t=1}^{k}\sum_{i,j=1}^{n_t}c_{ij}^t\sum_{p,q=1}^{n_t}a_{ip}^t(\pi^{-1})a_{pq}^t(\sigma)a_{qj}^t(\pi)\\
&=\sum_{t=1}^{k}\sum_{i,j,p,q=1}^{n_t}c_{ij}^t a_{pq}^t(\sigma)\left(\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}a_{ip}^t(\pi^{-1})a_{qj}^t(\pi)\right)
\end{aligned}$$

$$=\sum_{t=1}^{k}\sum_{i,j,p,q=1}^{n_t} c_{ij}^t a_{pq}^t(\sigma)\left(\frac{1}{n_t}\delta_{ij}\delta_{pq}\right)$$

$$=\sum_{t=1}^{k}\sum_{i,p=1}^{n_t} c_{ii}^t a_{pp}^t(\sigma)\frac{1}{n_t}$$

$$=\sum_{t=1}^{k}\left(\frac{1}{n_t}\sum_{i=1}^{n_t} c_{ii}^t\right)\chi_t(\sigma)=\sum_{t=1}^{k} c_t\chi_t(\sigma).$$

这就证明了 $f=\sum_{t=1}^{k} c_t\chi_t$. ∎

定理4.9 （第二类正交关系）设$[\sigma]$为有限群G包含σ的共轭类，则

$$\frac{|[\sigma]|}{|G|}\sum_{\chi\in I(G)}\chi(\sigma)\overline{\chi(\pi)}=\begin{cases}1, & \text{如果}[\sigma]=[\pi]\\ 0, & \text{如果}[\sigma]\neq[\pi]\end{cases}. \tag{7}$$

证 设$I(G)=\{\chi_1,\cdots,\chi_k\}$，上定理已证明群$G$的共轭类个数也是$k$. 现在取$\sigma_1,\cdots,\sigma_k\in G$使它们属于不同的共轭类.

令$U=(u_{ij})\in M_k$，其中

$$u_{ij}=\left(\frac{|[\sigma_j]|}{|G|}\right)^{\frac{1}{2}}\chi_i(\sigma_j).$$

利用不可约特征标是规格化正交的类函数就有

$$(UU^*)_{ij}=\sum_{t=1}^{k}u_{it}\bar{u}_{jt}=\frac{1}{|G|}\sum_{t=1}^{k}\chi_i(\sigma_t)\overline{\chi_j(\sigma_t)}\,|[\sigma_t]|$$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi_i(\sigma)\overline{\chi_j(\sigma)}=\delta_{ij}$$

这表明$UU^*=I_k$，因而$U^*U=I_k$，于是

$$\delta_{ij}=(U^*U)_{ij}=\sum_{t=1}^{h}\bar{u}_{ti}u_{tj}$$

$$=\frac{(|[\sigma_i]||[\sigma_j]|)^{1/2}}{|G|}\sum_{t=1}^{h}\overline{\chi_t(\sigma_i)}\chi_t(\sigma_j)\ . \qquad (8)$$

显然(8)式是(7)式的另一种写法. ∎

该定理的一个特殊而有用的情形是在(7)式中取$\sigma=e$，注意到包含e的共轭类只有它本身就得

定理4.10 设G是有限群，则

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in I(G)}\chi(e)\chi(\sigma)=\begin{cases}1\ ,\text{如果}\sigma=e\\0\ ,\text{如果}\sigma\neq e.\end{cases}$$ ∎

(本附录可参看[14]、[26]或[4])

练　习　4

1. 设χ,μ是有限群G的任意特征标，证明

(i) $\chi(\sigma\pi)=\chi(\pi\sigma)$，$\forall\sigma,\pi\in G$

(ii) $|\chi(\sigma)|\leqslant\chi(e)$，$\forall\sigma\in G$

(iii) $(\chi,\mu)_G$是非负整数.

2. 设χ是有限群G的不可约特征标，证明

(i) $\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)=\begin{cases}|G|,\ \text{如果}\chi\equiv 1\\0,\ \text{不然的话}.\end{cases}$

(ii) $\sum_{\sigma\in G}|\chi(\sigma)|^2=|G|$.

3. 证明$\sum_{\chi\in I(G)}|\chi(\sigma)|^2=\frac{|G|}{|[\sigma]|}$.

4. 证明 $\chi\equiv1$ 和 $\chi=\varepsilon$ 是群 S_m 仅有的两个1阶特征标.

5. 求出 S_3 的全部不可约特征标.

6. 设 A 是有限群G的矩阵表示，证明$C(\sigma)=A(\sigma^{-1})^{\mathsf{T}}$及$D(\sigma)=\overline{A(\sigma)}$都是群 G 的表示且 C与 D 等价. 又$E(\sigma)=A(\sigma)^*$是群 G 的表示吗?

7. 设 χ 是有限群 G 的特征标，证明 $\bar{\chi}$ 也是（这里 $\bar{\chi}(\sigma)=\overline{\chi(\sigma)}$)并且$\chi$与$\bar{\chi}$具有相同的可约性.

参 考 文 献

[1] 张禾瑞，近世代数基础，人民教育出版社，1978年修订本.

[2] 张禾瑞、郝鈵新，高等代数（第二版），人民教育出版社，1980.

[3] Ray M. Bowen and C. -C. Wang, *Introduction to Vectors and Tensors,* Plenum Press, New York, 1976.

[4] W. Feit, *Characters of Finite Groups,* Benjamin, New York-Amsterdam, 1967.

[5] R. Freese, Inequalities for generalized matrix functions based on arbitrary characters, *Linear Algebra Appl.* **7** (1973), 337-345.

[6] W. Greub, *Multilinear Algebra,* 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, 1978.

[7] R. Grone, A note on the dimension of an orbital subspace, *Linear Algebra Appl.* **17** (1977), 283-286.

[8] D. Hershkowitz and A. Berman, Necessary conditions and a sufficient condition for the Fischer-Hadamard Inequalities, *Linear and Multilinear Algebra,* **13** (1983), 67-72.

[9] K. Hoffman and R. Kunze, *Linear Algebra,* Second Edition, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

[10] E. Lieb, Proofs of some conjectures on permanents, *J. Math. Mech.* **16** (1966), 127-134.

[11] J. H. van Lint, Notes on Egoritsjev's proof of van der Waerden conjecture, *Linear Algebra Appl.* **39**

(1981), 1–8.

[12] M. Marcus, *Finite Dimensional Multilinear Algebra*, Part I, Marcel Dekker, New York, 1973.

[13] M. Marcus, *Finite Dimensional Multilinear Algebra*, Part II, Marcel Dekker, New York, 1975.

[14] M. Marcus, *Introduction to Modern Algebra*, Marcel Dekker, New York, 1978.

[15] M. Marcus, Derivations, Plücker relations, and the numerical range, *Indiana Univ. Math. J.* 22 (1973), 1137–1149.

[16] M. Marcus and H. Minc, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*, Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1964.

[17] M. Marcus and H. Minc, Permanents, *Amer. Math. Monthly*, **72** (1965), 577–591.

[18] M. Marcus and H. Minc, Generalized matrix functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **116** (1965), 316–329.

[19] M.Marcus and P. J. Nikolai, Inequalities for some monotone matrix functions, *Canad. J. Math.* **21** (1969), 485–494.

[20] M. Marcus and G. W. Soules, Some inequalities for combinatorial matrix functions, *J. Comb. Theory*, **2** (1967), 145–163.

[21] M. Marcus and Bo-Ying Wang, Some variations on the numercial range, *Linear and Multilinear Algebra*, **9** (1980), 111–120.

[22] A. W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Appications*, Acadmic Press, New York, 1979.

[23] R. Merris, An identity for matrix functions, *Pa-*

cific J. Math. **50** (1974), 557-562.

[24] R. Merris, An identity involving generalized matrix functions, *Linear and Multilinear Algebra*, **2** (1974), 123-125.

[25] R.Merris, Equality of decomposable symmetrized tensors, *Canad. J. Math.* **27** (1975), 1022-1024.

[26] R.Merris, *Multilinear Algebra*, Monograph Series, Institute for the Interdisciplinary Applications of Algebra and Combinatories, UC Santa Barbara, 1975.

[27] R. Merris, The structure of higher degree symmetry classes of tensors, *J. Research* (U. S. Nat. Bur. Standards), **80B** (1976), 259-264.

[28] R. Merris, The structure of higher degree symmetry classes of tensors II, *Linear and Multilinear Algebra*, **6** (1978), 171-178.

[29] R. Merris, Recent advances in symmetry classes of tensors, *Linear and Multilinear Algebra*, **7** (1979), 317-328.

[30] R.Merris and S. Pierce, Elementary divisors of higher degree associated transformations, *Linear and Muttilinear Algebra*, **1** (1973), 241-250.

[31] S.Pierce, Orthogonal decompositions of tensor spaces, *J. Research* (U. S. Nat. Bur. Standards), 74B (1970), 41-44.

[32] I. Schur, Über endliche Gruppen und Hermitesche Formen, *Math. Z.* **1** (1918), 184-207.

[33] J. A. D. da Silva, Conditions for equality of decomposable symmetric tensors, *Linear Algebra Appl.* **24** (1979), 85-92.

[34] S. G. Williamson, On a class of combinatorila

inequalities, *J. Comb. Theory*, **6** (1969), 359-369.

[35] Bo-Ying Wang, Some necessary and sufficient conditions satisfied by decomposable tensors in Grassmann spaces, *Linear and Multilinear Algebra*, **11** (1982), 289-299.

[36] 石钟慈、王伯英,某些类矩阵的行列式,特征值以及条件数界限的若干估计，数学学报，15:3(1965), 326-341.

[37] 王伯英，一类矩阵特征值最小距离的界限，计算数学，5:2 (1983), 176-186.

[38] 王伯英，酉矩阵的子式与余子式的关系，北京师范大学学报，1983, 1:27-31.

[39] 王伯英，反对称张量空间中可合元素的一些性质，数学学报，28:3(1985),311—318.

[40] 王伯英，张量空间中一种厄米特算子的充要条件，数学年刊,6A:1(1985), 79-82.

[41] 王伯英，张量空间中一种非负定算子的充要条件，数学年刊 6A:5(1985),559—563.

[42] 王伯英，基于任意特征标的一个组合公式和应用，北京师范大学学报，1985, 1:5-10.

索　引